Capitolo 5

Il Metodo del Simplesso su Reti

La particolare struttura di alcuni problemi di PL può essere talvolta utilizzata per la progettazione di tecniche risolutive molto più efficienti dell'algoritmo del simplesso. Il caso più importante si ha nei cosiddetti *problemi di trasporto* o *problemi di flusso su reti*. Come mostrato da G.B.Dantzig(1951b) e A. Orden(1956), la particolare struttura dei problemi di flusso permette forti semplificazioni nel metodo del simplesso rivisto. Il risultante *metodo del simplesso su reti* può essere sviluppato sia modificando il metodo del simplesso rivisto, sia iniziando da zero. Per rendere l'esposizione autoesplicativa, verrà inizialmente adottato il secondo metodo.

5.1 Il problema di Flusso di Costo Minimo

Il problema di Flusso di Costo Minimo, o problema dei trasporti, si occupa di trovare la via più economica per trasportare una determinata quantità di un bene, come petrolio, arance o automobili, da uno o più punti di produzione ad uno o più punti di consumo, attraverso una rete di trasporto data (per es. una rete idraulica, o una rete stradale o ferroviaria). Va comunque sottolineato fin d'ora che il modello matematico del problema si presta a rappresentare molti problemi che nulla hanno a che fare con la spedizione di merci, e pertanto in questo testo si preferisce la nozione più astratta di *"flusso"*. La rete può essere convenientemente rappresentata mediante un grafo orientato, come in figura 5.1.

In questa rappresentazione i 5 nodi del grafo, denominati $1, 2, .., 5$, possono essere associati ad altrettante località (città, depositi, impianti industriali, stazioni, ...), e gli 8 archi a delle vie di comunicazione a senso unico (tratte stradali, ferroviarie, ...) tra queste località. Si osserva che non si perde di generalità nel considerare le strade a

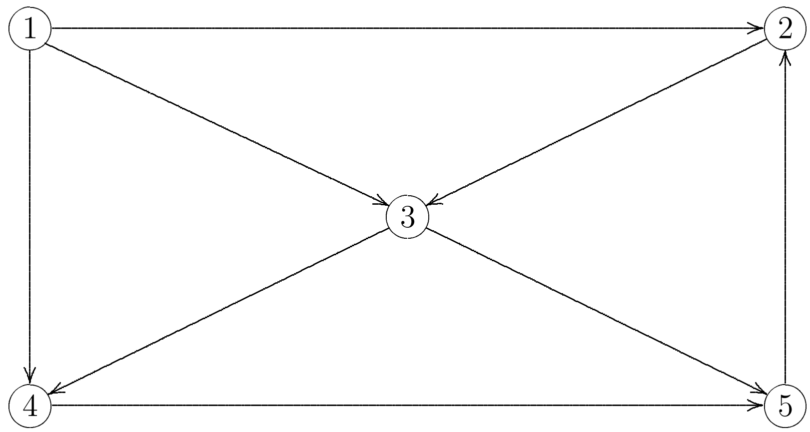

Figura 5.1: Un esempio di rete di trasporto

senso unico piuttosto che considerarle a doppio senso; al contrario ogni strada a doppio senso può essere rappresentata da una coppia di archi che puntano in direzioni opposte tra le due località). Seguendo la terminologia utilizzata comunemente nella teoria dei grafi, indicheremo con n in numero dei nodi del grafo e con m il numero di archi, per cui il grafo dell'esempio 5.1 ha $n = 5$ e $m = 8$.

La rete costituisce solo una parte dei dati in un problema di trasporto. A questi si aggiungono:

- la domanda di beni in certe località e la disponibilità dei beni in altre località;

- i costi di trasporto da una località all'altra.

Per analogia con il problema di distribuzione di liquidi, i nodi che richiedono beni sono chiamati *pozzi*, mentre i nodi con disponibilità di beni sono chiamati *sorgenti*. Possono esistere anche dei nodi che non richiedono né dispongono di beni, tali nodi sono detti *di transito*. Si noti che questa classificazione dei nodi in tre tipologie è completamente indipendente dalla struttura della rete: è definita soltanto dai dati numerici di disponibilità e domanda. Nell'esempio 5.1, se c'è una domanda di 6 unità al nodo 4, di 8 unità al nodo 5, e una disponibilità di 10 unità al nodo 1, e di 4 unità al nodo 2, allora 4 e 5 sono nodi *pozzo*, mentre 1 e 2 sono nodi *sorgente*. Il nodo 3 è un nodo di transito. Rappresentando la disponibilità di bene come una domanda negativa, è possibile associare ad ogni nodo $i = 1, \ldots, n$ un'etichetta pari alla domanda d_i del nodo, che sarà positiva per i pozzi, negativa pe rle sorgenti e nulla per i nodi di transito. Il vettore domanda è un vettore d ad n componenti, in cui la i-esima componente è pari a d_i. La domanda appena descritta si descrive quindi con il vettore:

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = d = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

In questo capitolo si manterrà la seguente assunzione:

Assunzione 5.1.1. La disponibilità totale di tutti i nodi sorgente è uguale alla domanda totale di tutti i nodi pozzo.

Questa assunzione appare piuttosto irrealistica in pratica: sarebbe sorprendente che la domanda totale di arance fosse esattamente uguale all'offerta del mercato. Comunque tale assunzione non limita l'applicabilità della teoria risultante: problemi pratici riguardanti il trasporto di beni possono essere sempre ricondotti ad una forma che soddisfi l'assunzione 5.1.1 aggiungendo opportuni nodi e archi fittizi, con funzioni del tutto analoghe alle variabili di scarto utilizzate per ricondurre in forma standard i problemi di PL. D'altra parte l'assunzione 5.1.1 rende la teoria più semplice ed elegante: ogni soluzione che soddisfa la domanda di tutti i *pozzi* deve soddisfare tale domanda esattamente e deve esaurire completamente la disponibilità di tutte le *sorgenti*.

Per quanto riguarda i costi di trasporto da una località all'altra, nei problemi di trasporto si assume che ogni arco (i, j) della rete abbia un costo unitario di trasporto c_{ij} associato. Pertanto un'unità di bene spedita da un'origine ad una destinazione "paga" un costo pari alla somma dei costi unitari di trasporto di tutti gli archi attraversati dal bene. Il problema di flusso di costo minimo consiste nel cercare una soluzione che minimizzi il costo totale che è necessario pagare per soddisfare la domanda di tutti i nodi della rete. Un ulteriore dato del problema sarà quindi il vettore c dei costi degli archi della rete. Per l'esempio di figura 5.1 un possibile vettore dei costi è il seguente:

$$c = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{23} \\ c_{34} \\ c_{35} \\ c_{45} \\ c_{52} \end{pmatrix} = d = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Si osservi come la notazione utilizzata in questo capitolo sia leggermente diversa da quella dei capitoli precedenti. Infatti le componenti del vettore c sono indicate con 2 indici, per associarle più direttamente agli archi della rete di flusso data.

In un problema di flusso una soluzione è definita specificando, per ogni arco (i, j), la quantità di bene x_{ij} che transita sull'arco, per tutti gli archi della rete. x_{ij} si dice *flusso sull'arco* (i, j). Una soluzione può quindi essere rappresentata con un vettore x ad m componenti.

Le quantità x_{ij} consentono infatti di ricavare il percorso di ogni singola unità di bene inviato dalle sorgenti ai pozzi. Per esempio, per il problema di figura 5.1, e con la domanda (5.1), una soluzione può essere la seguente:

$$x = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{23} \\ x_{25} \\ x_{34} \\ x_{35} \\ x_{45} \end{pmatrix} = d = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

che corrisponde a spedire:

- 4 unità di bene da 1 a 4 direttamente, con un costo $4c_{14} = 4$;
- 6 unità di bene da 1 a 5 passando per il nodo di transito 3, con un costo $6(c_{13} + c_{35}) = 72$;
- 2 unità di bene da 2 a 4 via 3, con un costo $2(c_{23} + c_{34}) = 6$.
- 2 unità di bene da 2 a 5 via 3, con un costo $2(c_{23} + c_{35}) = 12$;

In effetti la rappresentazione di una soluzione con il vettore x è ambigua: allo stesso vettore potrebbe corrispondere anche una spedizione diversa:

- 4 unità di bene da 1 a 4 direttamente,
- 2 unità di bene da 1 a 4 passando per il nodo di transito 3,
- 4 unità di bene da 1 a 5 passando per il nodo di transito 3,

- 4 unità di bene da 2 a 5 via 3.

Comunque l'ambiguità è inoffensiva: quando due cassette di arance sono considerate intercambiabili, l'effettivo percorso di una specifica cassetta è di poco interesse, e quindi le due soluzioni sono del tutto equivalenti e ad esse corrisponde lo stesso valore 94 della funzione obiettivo. Quello che ci interessa determinare è quindi un valore del vettore x, a cui associare un costo $c^T x$ che sia minimo tra tutte le soluzioni ammissibili. Negli esempi a seguire sarà spesso conveniente rappresentare graficamente il vettore x, disegnando solo gli archi (i, j) della rete per i quali $x_{ij} > 0$, ed ignorando gli archi (i, j) per i quali $x_{ij} = 0$. Per esempio la soluzione (5.3) può essere rappresentata come in figura 5.2.

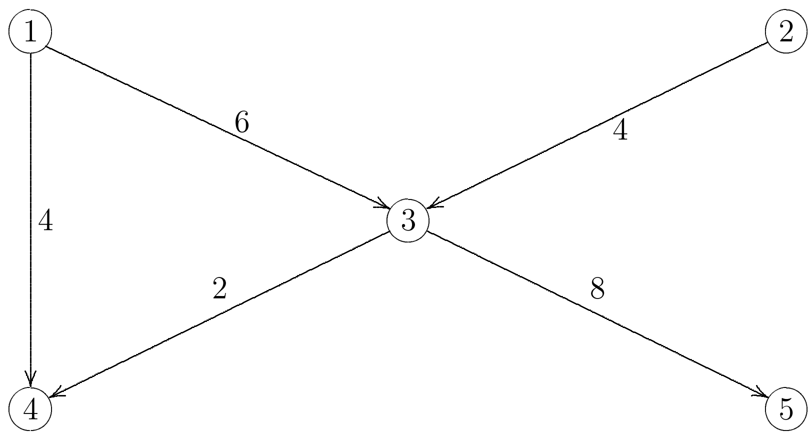

Figura 5.2: Una soluzione

Una soluzione, descritta dal valore del flusso sui singoli archi, è *ammissibile* se e solo se:

(i) Per ogni nodo di transito la somma dei flussi degli archi entranti è pari alla somma dei flussi degli archi uscenti. Ad esempio, $6 + 4 = 2 + 8$ per il nodo di transito 3 della soluzione (5.3).

(ii) Per ogni nodo pozzo, la somma dei flussi degli archi entranti meno la somma dei flussi degli archi uscenti è uguale alla domanda del nodo. Nell'esempio (5.3), si ha $4 + 2 = 6$ al pozzo 4.

(iii) Per ogni nodo sorgente, la somma dei flussi uscenti meno la somma dei flussi entranti è pari alla disponibilità del nodo. Nell'esempio (5.3), si ha $6 + 4 = 10$ alla sorgente 1.

(iv) Tutti i flussi degli archi sono non negativi.

Queste condizioni, insieme alla funzione obiettivo del problema, possono essere espresse sinteticamente come:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & \begin{cases} Ax = d \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{5.4}$$

dove c è il vettore dei costi degli archi, d è la domanda dei nodi e A è la matrice di incidenza della rete. Si osserva che, mentre nei capitoli precedenti abbiamo utilizzato la lettera m per indicare il numero di righe di una matrice e la lettera n per il numero delle colonne, ora i ruoli delle due lettere sono scambiati: A ha dimensioni $n \times m$. Questo scambio è forzato dalla convenzione della teoria dei grafi che indica il numero di nodi con la lettera n e il numero di archi con la lettera m. Per l'esempio di figura 5.1, la matrice A e la formulazione del problema di flusso di costo minimo sono quindi le seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & & & & & \\ 1 & & & -1 & & & & 1 \\ & 1 & & 1 & -1 & -1 & & \\ & & 1 & & 1 & & -1 & \\ & & & & & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$$\begin{array}{ll} \min & 10x_{12} + 8x_{13} + x_{14} + 2x_{23} + x_{34} + 4x_{35} + 12x_{45} - 7x_{52} \\ & \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrcr} -x_{12} & -x_{13} & -x_{14} & & & & & & = & -10 \\ x_{12} & & & -x_{23} & & & & +x_{52} & = & -4 \\ & x_{13} & & +x_{23} & -x_{34} & -x_{35} & & & = & 0 \\ & & x_{14} & & +x_{34} & & -x_{45} & & = & 6 \\ & & & & & +x_{35} & +x_{45} & -x_{52} & = & 8 \\ x \geq 0 & & & & & & & & & \end{array} \right. \end{array} \tag{5.6}$$

Si osserva che la matrice A *non* ha rango pieno, basta infatti sommare tutte le righe per ottenere il vettore nullo, il che implica che le righe di A non sono linearmente indipendenti fra loro. La assunzione 5.1.1 ci assicura comunque che il problema ammette soluzione, in quanto $rango[A] = rango[A\ d]$. Pertanto in un problema di flusso di costo minimo una delle equazioni può sempre essere cancellata.

Nella parte restante di questo capitolo vedremo come si particolarizzano i passi dell'algoritmo del simplesso nel caso di problema di flusso di costo minimo.

5.2 Soluzioni base e alberi ricoprenti

Poiché sappiamo che la matrice A non ha rango massimo, una base B di A deve essere contenuta in una collezione di al più $m-1$ colonne di A linearmente indipendenti. Queste colonne corrispondono ad una collezione di archi della rete di flusso. Vogliamo dimostrare che, se la rete è connessa, tutte le basi di A sono associate ad alberi ricoprente della rete. Poiché la nozione di albero ricoprente è associata ai grafi non orientati, per estenderla ai grafi orientati è sufficiente ignorare il verso degli archi della rete di flusso. La figura 5.3 mostra un esempio di albero ricoprente del grafo di figura 5.1.

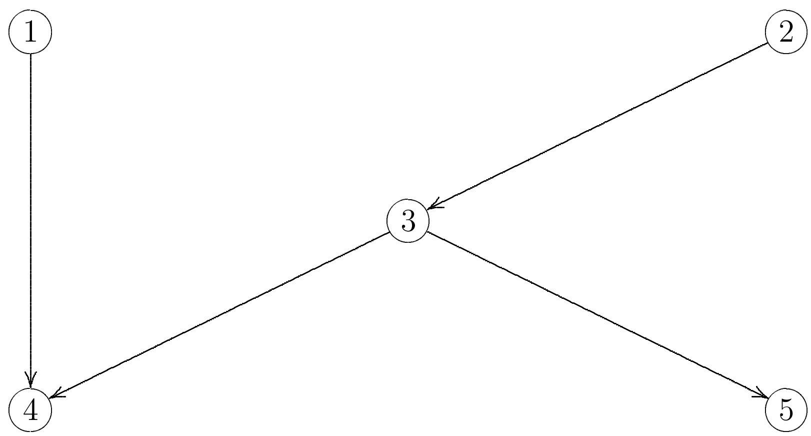

Figura 5.3: Un albero ricoprente

Vogliamo ora dimostrare che le colonne di A associate ad un albero ricoprente sono linearmente indipendenti. Allo scopo iniziamo con l'osservare che ogni albero ha la seguente proprietà: indipendentemente da come sia etichettato un nodo iniziale v_0, i rimanenti nodi possono essere numerati $v_1, v_2, .., v_{n-1}$ in modo tale che, per ogni $i \geq 1$, esiste esattamente un arco con un estremo uguale a v_i e l'altro estremo uguale ad uno dei nodi $v_0, v_2, .., v_{i-1}$. Allo scopo è sufficiente effettuare una visita dell'albero etichettando i nodi (da v_0 a v_{n-1}) e gli archi (da 1 a $n-1$) nell'ordine in cui vengono visitati. Se ordiniamo le $n-1$ colonne e le n righe della matrice A associate all'albero ricoprente, nell'ordine di visita suddetto, si ottiene una matrice $(n-1) \times n$. Se scartiamo la prima riga della matrice (associata all'etichetta v_0) resta una sottomatrice, di A di dimensioni $(n-1) \times (n-1)$ che, per costruzione è triangolare superiore ed ha tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero. Questa sottomatrice ha quindi determinante diverso da zero, il che implica che la matrice A ha rango $n-1$, e che le colonne associate ad ogni albero ricoprente sono sempre linearmente indipendenti fra loro. Questo dimostra che le colonne di A associate ad un albero ricoprente della rete di flusso sono sempre basi di A.

A titolo di esempio, per l'albero ricoprente di figura 5.3, se visitiamo i nodi nell'ordine $1, 4, 3, 2, 5$, e quindi visitiamo gli archi nell'ordine $(1, 4), (3, 4), (2, 3), (3, 5)$, Otteniamo la nuova numerazione di figura 5.4, la cui matrice di incidenza, ottenuta ri-ordinando righe e colonne nel nuovo ordine di visita, è :

$$\begin{array}{cc} \textit{etichetta} & \textit{archi} \\ & \begin{array}{cccc} (1,4) & (3,4) & (2,3) & (3,5) \end{array} \\ \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & -1 \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.7}$$

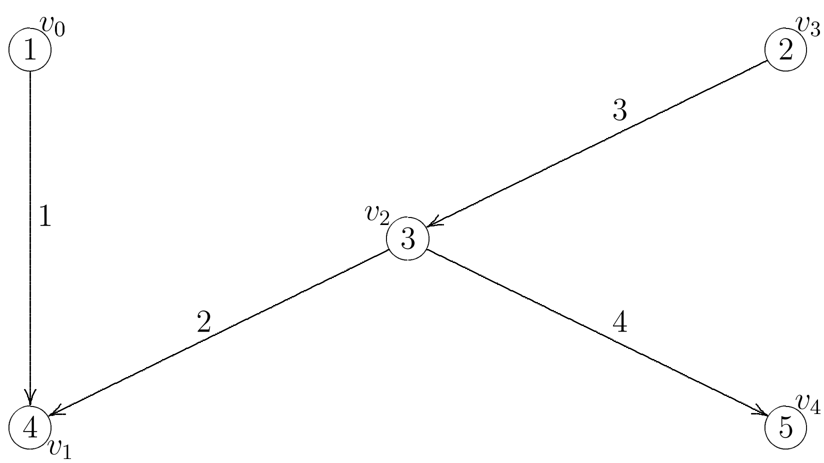

Figura 5.4: Un albero etichettato

Nella parte restante di questa sezione vogliamo dimostrare che un insieme di colonne di A è una base solo se è associato ad un albero ricoprente della rete di flusso, ovvero il viceversa di quanto dimostrato sopra. Allo scopo è sufficiente osservare che una base di A contiene necessariamente $m - 1$ colonne. Un insieme di $m - 1$ colonne di A che non sia un albero ricoprente deve necessariamente contenere un ciclo (non orientato). Per i nostri scopi è quindi sufficiente dimostrare che le colonne di A associate ad un ciclo sono linearmente dipendenti, ovvero che esiste una combinazione lineare delle colonne, con coefficienti non tutti nulli, a somma 0. Dato un ciclo, i coefficienti della combinazione lineare possono ottenersi semplicemente percorrendo il ciclo in un verso qualsiasi e fissando il coefficiente dell'arco (i, j) del ciclo:

- pari a 1 se l'arco è *concorde* con il verso di percorrenza del ciclo;

- pari a -1 se l'arco è *discorde* dal verso di percorrenza del ciclo;

Viene lasciato per esercizio al lettore verificare che questa combinazione lineare delle colonne di A associate ad un ciclo ha somma zero. Il seguente teorema è quindi dimostrato:

Teorema 5.2.1. *Data una rete di flusso connessa G, e detta A la sua matrice di incidenza nodi-archi, una sottomatrice B $(n-1) \times (n-1)$ è una base di A se e solo se gli archi di G associati alle colonne di B costituiscono un albero ricoprente di G.*

A titolo di esempio, si consideri il ciclo formato dagli archi $(1,3)$, $(3,4)$ e $(1,4)$ in figura 5.2. Percorrendo il ciclo nel verso $1,3,4$ si ha che l'arco $(1,4)$ è discorde, mentre gli altri due sono concordi con il verso di percorrenza. Le colonne di A associate ad i tre archi sono:

$$A_{13} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_{34} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_{14} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Moltiplicando la colonna A_{14} per -1 e le altre per 1, si ottiene la combinazione lineare:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

il che dimostra che le tre colonne A_{13}, A_{34} e A_{14} sono linearmente dipendenti e quindi non possono far parte contemporaneamente di una base di A.

Risolvendo un problema di flusso di costo minimo con l'algoritmo del simplesso, avremo quindi che tutte le soluzioni base ammissibili esplorate nella fase 2 saranno alberi ricoprenti della rete di flusso. Si noti che, come accade per qualsiasi problema di PL, anche nei problemi di flusso possono esistere basi ammissibili, non ammissibili e degeneri. La condizione di ammissibilità di una base è sempre la stessa: $x_B = B^{-1}d \geq 0$, che però in questo caso può essere verificata più agevolmente risolvendo per sostituzione il sistema $Bx_B = d$, a partire da una foglia dell'albero ricoprente, e verificando che $x_B \geq 0$.

Si può verificare, per esempio, che l'albero di figura 5.3 NON è ammissibile, in quanto la corrispondente soluzione base è :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{14} \\ x_{34} \\ x_{23} \\ x_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Una soluzione base ammissibile è invece quella di figura 5.5, per la quale si ha:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

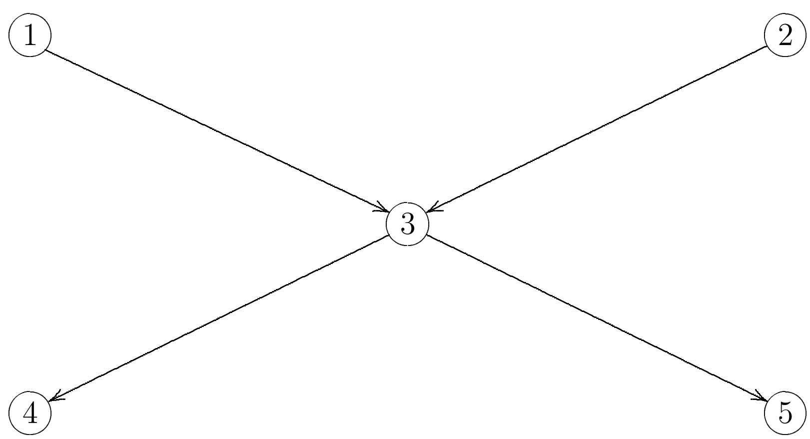

Figura 5.5: una soluzione base ammissibile

5.3 Condizioni di ottimalità

In questa sezione vogliamo mostrare come sia possibile verificare l'ottimalità di una soluzione base in modo efficiente, utilizzando le condizioni di complementarità. Il problema di flusso di costo minimo e il suo duale sono riportati in (5.9) e (5.11), rispettivamente.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
& \begin{cases} Ax = d \\ x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & d^T u \\
& \left\{ u^T A \leq c^T \right.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

In realtà il problema primale ha una equazione ridondante, che potrebbe essere eliminata senza alterare il problema. Questo significa che il duale ha una variabile di troppo, che potrebbe essere eliminata senza alterare il problema. Per semplicità di notazione tratteremo primale e duale senza eliminare equazioni/variabili, ma terremo conto di questa osservazione fissando arbitrariamente a zero una delle variabili duali (il che equivale ad eliminarla). Il problema duale può essere scritto più convenientemente per esteso, indicando con $\mathcal{A}$ l'insieme degli archi della rete di flusso:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i u_i \\
& \left\{ u_j - u_i \leq c_{ij} \qquad \forall\, (i,j) \in \mathcal{A} \right.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Se partizioniamo le colonne di A in colonne in base e fuori base, $A = [B\,F]$, si ottiene una corrispondente partizione degli archi di $\mathcal{A}$ nei due insiemi $\mathcal{B}$ degli archi dell'albero ricoprente, e $\mathcal{F}$ degli archi fuori base. Le condizioni di complementarità diventano:

$$
\begin{cases}
u^T(Ax - b) = 0 \\
(c_B^T - u^T B)x_B = 0 \\
(c_F^T - u^T F)x_F = 0
\end{cases}
\tag{5.12}
$$

Si osserva che il primo ed il terzo gruppo di equazioni sono sempre verificate da una soluzione base x ammissibile (perché $Ax = b$ e $x_F = 0$). Se la soluzione x non è degenere invece, il secondo gruppo si traduce nelle condizioni: $c_B^T = u^T B$, che per esteso diventano:

$$
\left\{ u_j - u_i = c_{ij} \qquad \forall\, (i,j) \in \mathcal{B} \right.
\tag{5.13}
$$

Queste sono $n - 1$ equazioni in n variabili, delle quali però una può essere fissata a zero, per quanto detto sopra. Si può allora determinare una soluzione u semplicemente per sostituzione, ottenendo un'unica soluzione di cui dobbiamo verificare l'ammissibilità duale:

$$\left\{ u_j - u_i \leq c_{ij} \qquad \forall\,(i,j) \in \mathcal{F} \right. \tag{5.14}$$

Se la soluzione ottenuta con le (5.13) verifica le (5.14), la soluzione base x è ottima.

Ad esempio, per la base ammissibile di figura 5.5, e con i costi dati in (5.6) si ha:

$$\begin{cases} u_3 - u_1 = c_{13} = 8 \\ u_3 - u_2 = c_{23} = 2 \\ u_4 - u_3 = c_{34} = 1 \\ u_5 - u_3 = c_{35} = 4 \end{cases}$$

Da cui, fissando arbitrariamente $u_3 = 0$, si ottiene: $u_1 = -8$, $u_2 = -2$, $u_4 = 1$, $u_5 = 4$. Sostituendo nelle (5.14) si ha:

$$\begin{cases} u_2 - u_1 \leq c_{12} = 10 \\ u_4 - u_1 \leq c_{14} = 1 \\ u_5 - u_4 \leq c_{45} = 12 \\ u_2 - u_5 \leq c_{52} = -7 \end{cases}$$

Sostituendo si ha che primo e terzo vincolo sono soddisfatti, mentre secondo e quarto sono violati. La base corrente non è quindi ottima.

5.4 Condizioni di illimitatezza e cambiamento di base

In questa sezione vogliamo mostrare come sia possibile verificare l'illimitatezza inferiore del prolema, oppure operare un cambiamento di base in modo efficiente. Se una soluzione x non verifica le condizioni di ottimalità, deve esistere un arco $(i,j) \in \mathcal{F}$ tale che $u_j - u_i > c_{ij}$. Di conseguenza, il costo ridotto della variabile x_{ij} sarà

$$\overline{c}_{ij} = c_{ij} - u^T A_{ij} = c_{ij} - u_j + u_i < 0,$$

e quindi la variabile (l'arco) da far entrare in base sarà proprio x_{ij}, ovvero l'arco (i,j).

L'arco (i,j) entrante in base forma con gli archi di $\mathcal{B}$ (l'albero ricoprente) un ciclo. Sia $\mathcal{C}$ l'insieme degli archi del ciclo. Poiché la nuova base dovrà essere un albero, l'arco uscente dalla base dovrà necessariamente essere un arco di $\mathcal{C}$. Inoltre sappiamo che l'arco uscente è quello il cui flusso si annulla per primo, aumentando il flusso sull'arco entrante. Infatti, se aumentiamo il flusso sull'arco (i,j) di un valore ϑ, per mantenere l'ammissibilità della soluzione base corrente dobbiamo necessariamente alterare di conseguenza il valore del flusso su tutti gli archi del ciclo, aumentando il flusso degli archi concordi con (i,j) e diminuendo il flusso degli archi discordi da (i,j). Pertanto il massimo valore ammissibile di ϑ sarà il minimo valore del flusso sugli archi del ciclo *discordi* da (i,j):

$$\max\ \vartheta = \min\{x_{hk} : (h,k) \in \mathcal{C},\ \ (h,k)\ \ discorde\ \ da\ \ (i,j)\}.$$

L'arco uscente dalla base è un arco $(u,v) \in \mathcal{C}$, discorde da (i,j), tale che: $x_{uv} = \vartheta$.

La nuova soluzione base si ottiene dalla precedente *aumentando* di ϑ in flusso degli archi di $\mathcal{C}$ concordi con (i,j), e *diminuendo* di ϑ in flusso degli archi di $\mathcal{C}$ discordi da (i,j).

Se invece tutti gli archi del ciclo $\mathcal{C}$ sono concordi con (i,j), possiamo aumentare indefinitamente il flusso sugli archi di $\mathcal{C}$, diminuendo contemporaneamente la funzione obiettivo, ovvero il problema è *illimitato inferiormente*. Questa condizione può verificarsi se e solo se nel ciclo *orientato* $\mathcal{C}$ la somma dei costi degli archi è negativa:

$$\sum_{(h,k)\in\mathcal{C}} c_{hk} < 0.$$

Sempre continuando con l'esempio (5.6) e con la base di figura 5.5, si ha che un possibile arco entrante in base è l'arco $(i,j) = (1,4)$, che forma con l'albero il ciclo $\mathcal{C} = \{(1,4),(1,3),(3,4)\}$. Gli archi di $\mathcal{C}$ discordi da $(1,4)$ sono $(1,3)$ e $(3,4)$. Il flusso su questi archi, dato in (5.15) è $x_{13} = 10$ e $x_{34} = 6$. Pertanto $\vartheta = 6$, l'arco uscente dalla base è l'arco $(3,4)$ e la nuova soluzione base è :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{14} \\ x_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ 4 \\ 0+6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Il cambiamento di base è evidenziato in figura 5.6. A questo punto possiamo procedere con una nuova iterazione:

Calcolo delle variabili u. dalle condizioni di complementarità si ha:

$$\begin{cases} u_3 - u_1 = c_{13} = 8 \\ u_3 - u_2 = c_{23} = 2 \\ u_4 - u_1 = c_{14} = 1 \\ u_5 - u_3 = c_{35} = 4 \end{cases}$$

Fissando arbitrariamente $u_1 = 0$ si ha: $u_3 = 8$, $u_2 = 2+8 = 10$, $u_4 = 1$, $u_5 = 4+8 = 12$. L'ammissibilità duale diventa:

$$\begin{cases} u_2 - u_1 \leq c_{12} = 10 \\ u_4 - u_3 \leq c_{34} = 1 \\ u_5 - u_4 \leq c_{45} = 12 \\ u_2 - u_5 \leq c_{52} = -7 \end{cases}$$

Da cui si osserva che il quarto vincolo è violato. Entra quindi in base l'arco $(5,2)$ che forma con gli altri archi in base il ciclo $\mathcal{C} = \{(5,2),(2,3),(3,5)\}$. Poiché tutti gli archi di $\mathcal{C}$ sono concordi con $(5,2)$, concludiamo che il problema è illimitato inferiormente. In effetti, il ciclo orientato $\{(5,2),(2,3),(3,5)\}$ ha costo totale:

$$c_{52} + c_{23} + c_{35} = 2 + 4 - 7 = -1 < 0$$

.

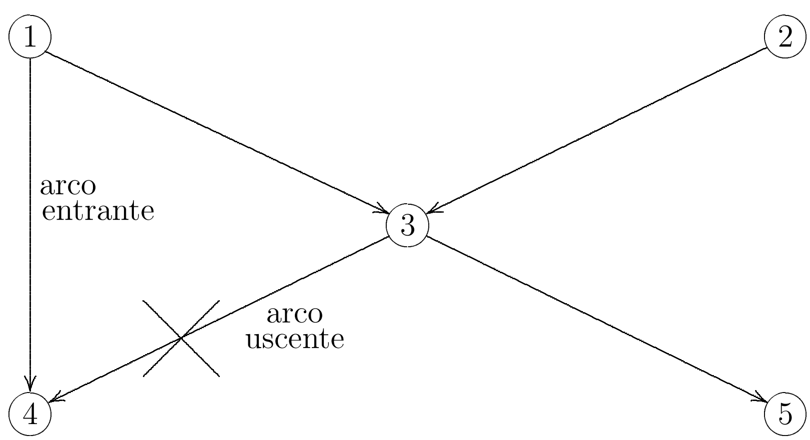

Figura 5.6: cambiamento di base

5.5 Fase 1 del simplesso su reti

In questa sezione vogliamo mostrare come sia possibile adattare la fase 1 del simplesso al simplesso su reti. L'idea di base è piuttosto semplice: nella fase 1 del simplesso si aggiunge una variabile artificiale per ogni vincolo tale da ottenere una base ammissibile immediata. Nel simplesso su reti opereremo in maniera del tutto analoga, stavolta però le variabili sono associate ad archi di una rete di flusso, e quindi dobbiamo aggiungere *archi artificiali* alla rete di flusso in modo da ottenere una soluzione ammissibile immediata. Il modo più semplice di ottenere questo risultato è di convogliare tutta la disponibilità di flusso delle sorgenti per ridistribuirla ai pozzi, ovvero aggiungere un *arco artificiale* uscente da ogni sorgente ed un *arco artificiale* entrante in ogni pozzo. Questi archi dovranno poi essere tutti collegati ad un *nodo artificiale* che svolge il ruolo di smistamento del flusso dalle sorgenti ai pozzi della rete. SI osserva che, in presenza di nodi di transito, i soli archi artificiali non formano un albero ricoprente. Per ottenere una base iniziale si può comunque aggiungere un arco originale della rete per ogni nodo di transito, tali da non formare cicli fra loro e con gli archi artificiali.

Analogamente alla fase 1 del simplesso, anche nella fase 1 del simplesso su reti la funzione obiettivo sarà la minimizzazione del flusso sui soli archi artificiali.

Una volta determinata la soluzione ottima del problema artificiale, si prosegue in analogia con il simplesso: se nella soluzione ottima è presente in base qualche arco artificiale con un flusso diverso da zero, il problema originale è *impossibile*, se il flusso in tutti gli archi artificiali è nullo, il flusso negli archi originali è una soluzione ammissibile del problema originale. Anche in questo caso è possibile che resti in base qualche arco artificiale (anzi, almeno uno deve restare per forza per collegare alla rete il nodo artificiale), però il passaggio alla fase 2 è molto più semplice, perché questa volta possiamo semplicemente cancellare dalla rete il nodo artificiale e tutti gli archi artificiali, e poi aggiungere qualche eventuale arco originale alla base per riottenere un albero ricoprente ed iniziare la fase 2. In questo caso avremo chiaramente una base iniziale degenere.

A titolo di esempio si consideri la rete in figura 5.7 e la domanda (5.16).

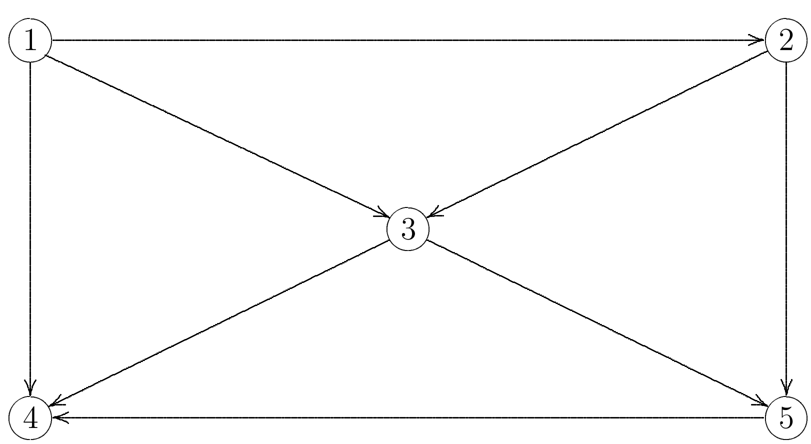

Figura 5.7: Un esempio di rete di trasporto

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

La fase 1 del simplesso su reti si imposta aggiungendo un nodo artificiale 6, due archi artificiali $(1,6)$ e $(4,6)$ dalle due sorgenti al nodo artificiale e due archi artificiali $(6,2)$ e $(6,5)$ dal nodo artificiale ai due pozzi, come in figura 5.8. Per ottenere una base iniziale del problema è necessario aggiungere un altro arco per collegare il nodo di transito 3 al resto dell'albero. Si aggiunga ad esempio l'arco $(3,5)$. La funzione obiettivo sarà la minimizzazione del flusso sui quattro archi artificiali, il vettore dei costi corrispondente è dato in (5.17), insieme alla soluzione base iniziale. L'albero ricoprente iniziale è invece riportato in figura 5.9.

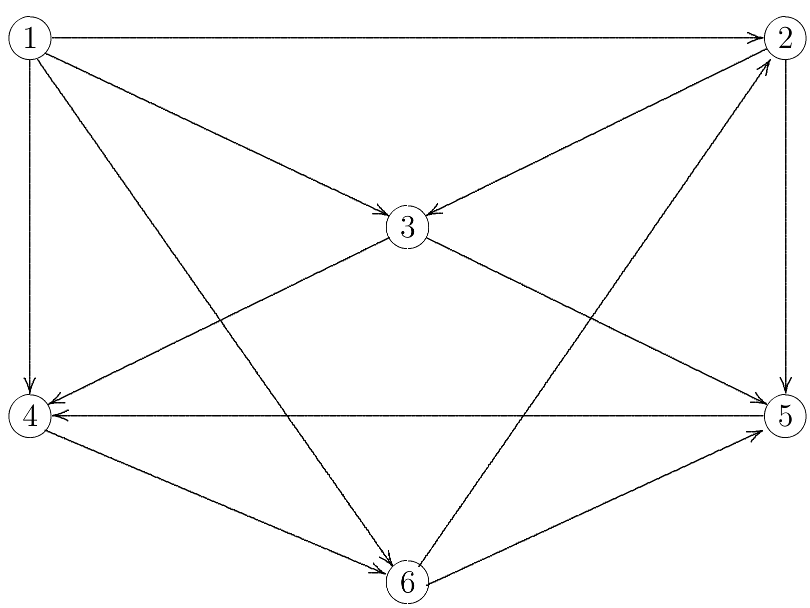

Figura 5.8: La rete di flusso artificiale

$$c = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{23} \\ c_{25} \\ c_{35} \\ c_{43} \\ c_{54} \\ c_{16} \\ c_{46} \\ c_{62} \\ c_{65} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_{16} \\ x_{46} \\ x_{62} \\ x_{63} \\ x_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |d_1| \\ |d_4| \\ |d_6| \\ |d_4| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

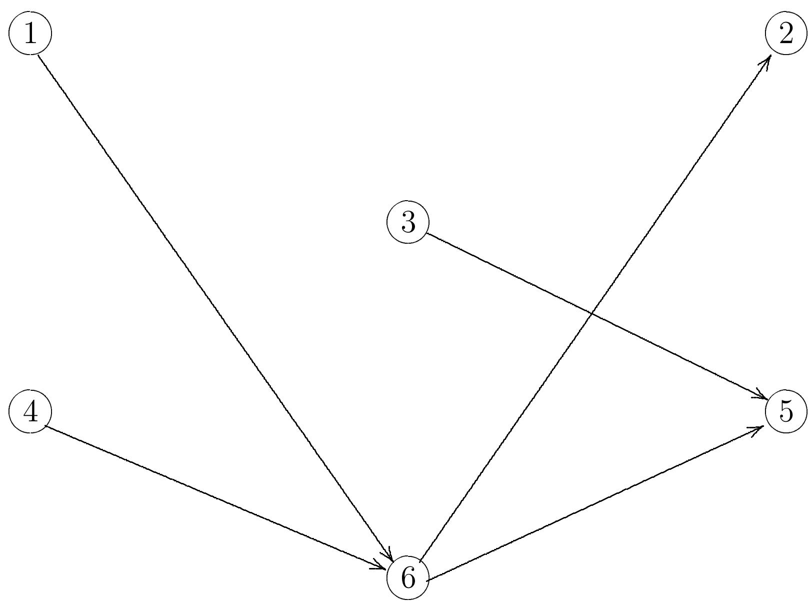

Figura 5.9: Una base ammissibile del problema artificiale

Il lettore può verificare che, se entra in base l'arco $(1,2)$, esce $(1,6)$. Se quindi facciamo entrare in base l'arco $(4,3)$, esce $(6,5)$. A questo punto, la soluzione è ottima per la fase 1, restano tuttavia in base gli archi artificiali $(4,6)$ e $(6,2)$, con flusso $x_{46} = x_{62} = 4$. Il problema iniziale è quindi impossibile. Questa situazione può essere verificata sulla rete. Infatti, se nella costruzione della soluzione duale assegnamo il valore $u_6 = 1$ al nodo artificiale, gli altri nodi della rete si dividono in nodi con variabile duale $u_i = 0$ e nodi con variabile duale $u_j = 2$. Se la soluzione è ottima per la fase 1 non può esistere un arco (i, j) nella rete che va da un nodo a variabile duale 0 ad un nodo a variabile duale 2 (che altrimenti violerebbe l'ammissibilità duale $u_j - u_i \leq 0$). Tuttavia la somma delle domande dei nodi a variabile duale 0 è strettamente negativa, così come la somma delle domande dei nodi a variabile duale 2 è strettamente positiva. In altre parole esiste una disponibilità di flusso dei nodi a variabile duale 0 che non può raggiungere i nodi a variabile duale 2, e questo determina l'impossibilità di risolvere il problema. Nell'esempio di figura 5.7 si può vedere infatti come i nodi 1 e 6 siano irraggiungibili dai nodi 3,4,5. Quindi esiste una disponibilità di questi ultimi, pari a 4 unità di flusso che non può raggiungere il pozzo 2.