A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Secondo appello
14 luglio2004

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili: x1 numero di titoli obbligazionari A
x2 numero di titoli obbligazionari B

Formulazione:

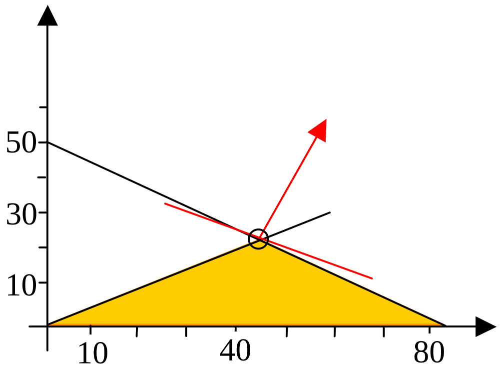
$$\max \quad 0{,}15 * 120 x_1 + 0{,}16 * 200 x_2$$
$$\begin{cases} 120x_1 + 200x_2 \le 10.000 \\ x_2 \le \frac{1}{3}(x_1 + x_2) \\ x \ge 0 \end{cases}$$

che in forma standard diventa:

$$\min \quad -18x_1 - 32x_2$$
$$\begin{cases} 120x_1 + 200x_2 + x_3 = 10.000 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Si può passare direttamente alla fase 2, utilizzando come base B=[A_3A_4] . Risolvendo la fase 2 al primo pivot entra A_1 ed esce A_3, al secondo entra A_2 ed esce A_4. La base ottenuta risulta ottima, la soluzione ottima è x_1=500/11; =x_2=250/11; x_3=0; x_4=0.

Passando al metodo grafico si ha il poliedro in figura con la soluzione ottima x_1=45,45; =x_2=22,73, che è coerente con quanto ottenuto con il simplesso.



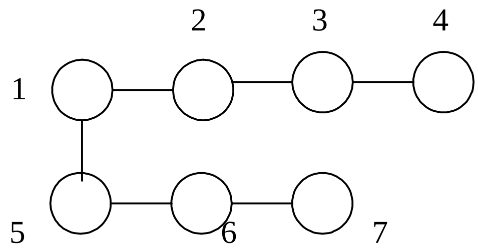
Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di un grafo orientato. Per convenzione +1 indica un arco uscente dal nodo. La prima e l'ultima riga indicano, rispettivamente, i nomi degli archi e i pesi.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*	*m*
1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0
3	0	-1	0	0	0	-1	+1	-1	0	0	0
4	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	+1	0
5	0	0	0	-1	0	0	0	+1	+1	0	0
6	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	+1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
Pesi	3	6	10	4	8	1	2	4	3	19	10

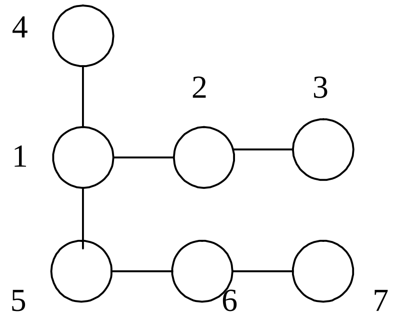
a) Trovare l’albero dei cammini di peso minimo, a partire dal nodo **1**, utilizzando l’algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all’albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo).

I flag vengono fissati ad uno nel seguente ordine 1,2,3,5,4,6,7 oppure 1,2,5,3,4,6,7.
L’albero dei cammini minimi è



b) Supponendo che il peso dell’arco *c* diventi 6 si discuta che cosa cambia nell’albero dei cammini minimi.

L’albero dei cammini minimi diviene



B

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili:
x1 numero Km cavo prodotti con lavoro ordinario nello stabilimento Italiano
x2 numero Km cavo prodotti con lavoro ordinario nello stabilimento Polacco
y1 numero Km cavo prodotti con lavoro straordinario nello stabilimento Italiano
y1 numero Km cavo prodotti con lavoro straordinario nello stabilimento Polacco
Mip merce trasportata dall'Italia alla Polonia
Mpi merce trasportata dalla Polonia all'Italia

Formulazione:

$$\min 110x_1 + 121y_1 + 90x_2 + 99y_2 + 8Mip + 8Mpi$$
$$\begin{cases} x_1 + y_1 + Mpi = 1000 + Mip \\ 500 + x_2 + y_2 + Mip = 900 + Mpi \\ x_1 \le 740 \\ x_2 \le 600 \\ y_1 \le 90 \\ y_2 \le 80 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, Mip, Mpi \ge 0 \end{cases}$$

che diventa:

$$\min 110x_1 + 121y_1 + 90x_2 + 99y_2 + 8Mip + 8Mpi$$
$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + y_1 - Mip + Mpi = 1000 \\ x_2 + y_2 + Mip - Mpi = 400 \\ x_1 \le 740 \\ x_2 \le 600 \\ y_1 \le 90 \\ y_2 \le 80 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, Mip, Mpi \ge 0 \end{cases}$$

passando al duale si ottiene:

$$\max 1000u_1 + 400u_2 + 740u_3 + 600u_4 + 90u_5 + 80u_6$$
$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ Mip \\ Mpi \\ \\ \end{array} \begin{cases} u_1 + u_3 \le 110 \\ u_2 + u_4 \le 90 \\ u_1 + u_5 \le 121 \\ u_2 + u_6 \le 99 \\ -u_1 + u_2 \le 8 \\ u_1 - u_2 \le 8 \\ u_1, u_2 \quad libere; u_3, u_4, u_5, u_6 \le 0 \end{cases}$$

Per rispondere alla seconda domanda basta osservare che le condizioni poste: $y_1 = 0$, $Mpi = 280$, $Mip = 0$ individuano completamente la soluzione primale del problema, pari a:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & Mip & Mpi \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 720 & 600 & 0 & 80 & 0 & 280 \end{pmatrix}^T$$

Impostando il problema duale e risolvendo le condizioni di ortogonalità nelle sole variabili u si ottiene:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 110 & 102 & 0 & -12 & 0 & -3 \end{pmatrix}^T$$

che è ammissibile duale. Quindi la risposta alla seconda domanda è affermativa.
Per rispondere all'ultima domanda basta osservare che la variabile duale u_2 all'ottimo vale 102. Questo è quindi il prezzo massimo perché sia conveniente acquistare cavo prodotto esternamente in Polonia invece di produrlo in proprio.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di un grafo *G* con 4 nodi, e sono dati i costi di ogni arco.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(4,6)	(5,6)	(6,7)
Capacità	30	50	40	10	60	15	70	15	90

a) Risolvere il problema del massimo flusso dal nodo 1 al nodo 7 applicando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Mostrate il taglio a capacità minima.

I cammini aumentanti sono:

$1\rightarrow2\rightarrow5\rightarrow6\rightarrow7$	flusso 10
$1\rightarrow3\rightarrow4\rightarrow6\rightarrow7$	flusso 50
$1\rightarrow4\rightarrow6\rightarrow7$	flusso 20
$1\rightarrow4\leftarrow3\rightarrow5\rightarrow6\rightarrow7$	flusso 5

Il flusso massimo individuato è pari a 85, ed il taglio di capacità minima è (2,5)(4,6)(3,5)

b) Dire che cosa accade nel caso in cui la capacità dell'arco (3,5) venga ridotta a zero.

In questo caso il cammino aumentante $1\rightarrow4\leftarrow3\rightarrow5\rightarrow6\rightarrow7$ non c'è, ed il taglio di capacità minima diventa (2,5) (4,6)

C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Secondo appello

14 luglio2004

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili:

x1 numero motori prodotti con lavoro ordinario nello stabilimento Italiano
x2 numero motori prodotti con lavoro ordinario nello stabilimento Tedesco
y1 numero motori prodotti con lavoro straordinario nello stabilimento Italiano
y1 numero motori prodotti con lavoro straordinario nello stabilimento Tedesco
Mig merce trasportata dall'Italia alla Germania
Mgi merce trasportata dalla Germania all'Italia

Formulazione:

$$\min 100x_1 + 115y_1 + 120x_2 + 138y_2 + 20Mig + 20Mgi$$
$$\begin{cases} 400 + x_1 + y_1 + Mgi = 900 + Mig \\ x_2 + y_2 + Mig = 800 + Mgi + 300 \\ x_1 \le 750 \\ x_2 \le 800 \\ y_1 \le 90 \\ y_2 \le 60 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, Mig, Mgi \ge 0 \end{cases}$$

che diventa:

$$\min 100x_1 + 115y_1 + 120x_2 + 138y_2 + 20Mig + 20Mgi$$
$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + y_1 - Mig + Mgi = 500 \\ x_2 + y_2 + Mig - Mgi = 1100 \\ x_1 \le 750 \\ x_2 \le 800 \\ y_1 \le 90 \\ y_2 \le 60 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, Mig, Mgi \ge 0 \end{cases}$$

passando al duale si ottiene:

$$\max 500u_1 + 1100u_2 + 750u_3 + 800u_4 + 90u_5 + 60u_6$$
$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ Mig \\ Mgi \\ \\ \end{array} \begin{cases} u_1 + u_3 \le 100 \\ u_2 + u_4 \le 120 \\ u_1 + u_5 \le 115 \\ u_2 + u_6 \le 138 \\ -u_1 + u_2 \le 20 \\ u_1 - u_2 \le 20 \\ u_1, u_2 \quad libere; u_3, u_4, u_5, u_6 \le 0 \end{cases}$$

Per rispondere alla seconda domanda basta osservare che le condizioni poste: $y_1 = 0$, $Mgi = 0$, $Mig = 250$ individuano completamente la soluzione primale del problema, pari a:

$$(x_1 \quad x_2 \quad y_1 \quad y_2 \quad Mig \quad Mgi)^T = (750 \quad 800 \quad 0 \quad 50 \quad 250 \quad 0)^T$$

Impostando il problema duale e risolvendo le condizioni di ortogonalità nelle sole variabili u si ottiene:

$$(u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6)^T = (118 \quad 138 \quad -18 \quad -18 \quad 0 \quad 0)^T$$

che è ammissibile duale. Quindi la risposta alla seconda domanda è affermativa.

Per rispondere all'ultima domanda basta osservare che le variabili duali u_1, u_2 all'ottimo valgono 112 e 132 rispettivamente. E' quindi conveniente accettare la prima proposta e non la seconda, in quanto acquistare un motore e conegnarlo in Italia costa 110 euro e produce una riduzione di 118 euro nei costi di produzione; acquistare un motore da consegnare in Germania costa invece 140 euro e produce una riduzione dei costi di produzione di soli 138 euro.

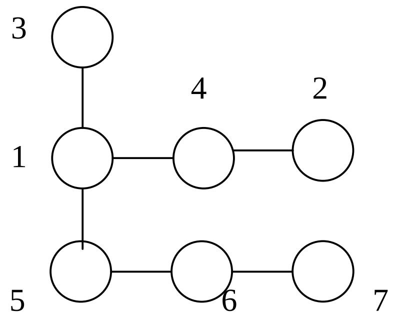
Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di un grafo orientato. Per convenzione +1 indica un arco uscente dal nodo. La prima e l'ultima riga indicano, rispettivamente, i nomi degli archi e i pesi.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*	*m*
1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	0	+1	0	0	-1	0	0	-1
3	0	-1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0
4	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	+1
5	0	0	0	-1	0	0	+1	+1	+1	0	0
6	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	+1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
Pesi	10	4	5	7	4	12	1	2	15	2	2

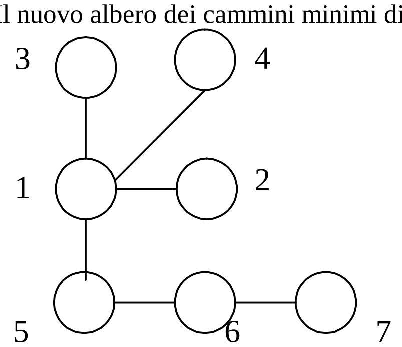
a) Trovare l'albero dei cammini di peso minimo, a partire dal nodo **1**, utilizzando l'algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo).

I flag vengono fissati ad uno nel seguente ordine 1,3,4,2,5,6,7 oppure 1,3,4,5,2,6,7.
L'albero dei cammini minimi è



b) Supponendo che il peso dell'arco *a* diventi 6 si discuta che cosa cambia nell'albero dei cammini minimi.

Il nuovo albero dei cammini minimi diviene



D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Secondo appello

14 luglio2004

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili: x1 numero di titoli obbligazionari A
x2 numero di titoli obbligazionari B

1. Formulazione:
$$\min \quad 0{,}08*50x_1+0{,}09*100x_2 \quad \begin{cases}50x_1+100x_2\geq 20.000\\ x_2\geq 0{,}2(x_1+x_2)\\ x\geq 0\end{cases}$$
ovvero:
$$\min \quad 4x_1+9x_2 \quad \begin{cases}50x_1+100x_2\geq 20.000\\ -x_1+4x_2\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}$$

2. Il duale del problema è:
$$\max \quad 20.000u_1 \quad \begin{cases}50u_1-u_2\leq 4\\ 100u_1+4u_2\leq 9\\ u\geq 0\end{cases}$$
che in forma standard diventa:
$$\min \quad -20.000u_1 \quad \begin{cases}50u_1-u_2+u_3=4\\ 100u_1+4u_2+u_4=9\\ u\geq 0\end{cases}$$

Si può passare direttamente alla fase 2, utilizzando come base B=[A_3A_4] . Risolvendo la fase 2 al primo pivot entra A_1 ed esce A_3, al secondo entra A_2 ed esce A_4. La base ottenuta risulta ottima, la soluzione ottima è u_1=0,08; =u_2=0,17; x_3=0; x_4=0.

3. Dalla matrice carry finale ottenuta al punto 2 si ottiene (riga 0) la soluzione ottima del problema primale: x_1=266,67; x_2=66,67.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di un grafo *G* con 4 nodi, e sono dati i costi di ogni arco.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(2,5)	(2,4)	(3,4)	(4,6)	(5,6)	(6,7)
Capacità	10	6	8	12	3	2	3	14	18

a) Risolvere il problema del massimo flusso dal nodo 1 al nodo 7 applicando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Mostrate il taglio a capacità minima.

I cammini aumentanti sono:
$1\rightarrow3\rightarrow4\rightarrow6\rightarrow7$ flusso 2
$1\rightarrow5\rightarrow6\rightarrow7$ flusso 8
$1\rightarrow2\rightarrow5\rightarrow6\rightarrow7$ flusso 6
$1\rightarrow2\rightarrow4\rightarrow6\rightarrow7$ flusso 1

Il flusso massimo individuato è pari a 17, ed il taglio di capacità minima è (4,6)(5,6)

b) Dire che cosa accade nel caso in cui la capacità dell'arco (4,6) divenga 9.

In questo caso il cammino aumentante $1\rightarrow2\rightarrow4\rightarrow6\rightarrow7$ può essere incrementato di una unità di flusso fino alla saturazione dell'arco (6,7). Il nuovo taglio di capacità minima diventa (6,7).