**Laurea in Informatica**
**A.A. 03/04**
**Corso di RICERCA OPERATIVA***

**CS - 20 luglio 2004**

**Esercizio n.1** (punti: 6)
Un'azienda manifatturiera che opera nel settore dell'informatica rifornisce di computer quattro negozi ($N_1$, $N_2$, $N_3$, $N_4$), a partire da due diversi magazzini ($M_1$, $M_2$). Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari di trasporto (espressi in euro) dai magazzini ai negozi, i prezzi unitari di vendita (espressi in euro) dei computer in ciascun negozio e la quantità di computer disponibili mensilmente in ciascun magazzino:

| | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ | Disponibilità |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 5 | 3 | 6 | 200 |
| $M_2$ | 5 | 9 | 7 | 4 | 300 |
| Prezzo unitario | 800 | 600 | 900 | 700 | |

Ad esempio, trasportare un computer dal magazzino $M_1$ (la cui disponibilità mensile è pari a 200 computer) al negozio $N_3$ costa 3 euro. Nell'ipotesi che tutti i computer che arrivano mensilmente nei negozi vengono venduti e sapendo che i costi di trasporto sono a carico dei negozi, formulare il problema come problema di ottimizzazione con l'obiettivo di massimizzare il minimo fra i profitti mensili conseguiti dai quattro negozi.
*Risoluzione*

- Variabili decisionali: $x_{ij}$=numero di computer trasportati mensilmente dal magazzino $M_i$ al negozio $N_j$, con $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4$.
- funzione obiettivo:

$$\max_x \min \left\{ \begin{array}{c} (800-8)x_{11} + (800-5)x_{21}, \\ (600-5)x_{12} + (600-9)x_{22}, \\ (900-3)x_{13} + (900-7)x_{23}, \\ (700-6)x_{14} + (700-4)x_{24} \end{array} \right\}$$

- vincoli:

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{4} x_{1j} \leq 200 \\ \sum_{j=1}^{4} x_{2j} \leq 300 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3,4 \\ x_{ij} \text{ int} \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3,4 \end{array}$$

**Esercizio n.2** (punti: 12)
Dato il seguente problema $(P)$ di Programmazione Lineare:

$$(P) \left\{ \begin{array}{lrrrl} \max z = & -3x_1 & -5x_2 & +4x_3 & \\ & 8x_1 & -4x_2 & +x_3 & = -3 \\ & x_1 & -x_2 & +4x_3 & \leq 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

*NOTA: **La prova scritta si intende superata se si realizza un punteggio complessivo pari almeno a 17**

1. (punti: 6) risolvere $(P)$ applicando il metodo del simplesso a due fasi;
2. (punti: 2) costruire il duale $(D)$ di $(P)$;
3. (punti: 4) applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $(D)$ a partire dalla soluzione ottima di $(P)$.

*Risoluzione*

Scrivendo $(P)$ in forma standard si ottiene:

$$(P)\left\{\begin{array}{lrrrrl} \min z = & 3x_1 & +5x_2 & -4x_3 & & \\ & 8x_1 & -4x_2 & +x_3 & & = -3 \\ & x_1 & -x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}\right. .$$

Moltiplicando per -1 il primo vincolo (per partire con la prima fase, il vettore $b$ deve essere positivo), il problema artificiale è il seguente:

$$(P_\rho)\left\{\begin{array}{lrrrrrl} \min \rho = & & & & & x_1^a & \\ & -8x_1 & +4x_2 & -x_3 & & +x_1^a & = 3 \\ & x_1 & -x_2 & +4x_3 & +x_4 & & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_1^a & \geq 0 \end{array}\right. .$$

Volendo applicare il metodo del simplesso al problema artificiale, si parte con la seguente tabella $T$:

$$\begin{array}{ccccc|c} -8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array},$$

che, trasformata in forma canonica con l'operazione pivot sull'elemento $T_{15}$, diventa:

$$\begin{array}{ccccc|c} -8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 8 & -4 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}.$$

Facendo l'operazione pivot sull'elemento $T_{12}$, si ottiene la seguente tabella ottima:

$$\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ -1 & 0 & 15/4 & 1 & 1/4 & 27/4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

Poichè $\rho^* = 0$, allora il problema $(P)$ è ammissibile e si può procedere con la seconda fase. La prima tabella che si ottiene è:

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -1/4 & 0 & 3/4 \\ -1 & 0 & 15/4 & 1 & 27/4 \\ \hline 3 & 5 & -4 & 0 & 0 \end{array},$$

che, trasformata in forma canonica, diventa:

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -1/4 & 0 & 3/4 \\ -1 & 0 & 15/4 & 1 & 27/4 \\ \hline 13 & 0 & -11/4 & 0 & -15/4 \end{array}.$$

Facendo pivot su $T_{23}$, si ottiene la seguente tabella ottima:

$$\begin{array}{cccc|c} -31/15 & 1 & 0 & 1/15 & 6/5 \\ -4/15 & 0 & 1 & 4/15 & 9/5 \\ \hline 184/15 & 0 & 0 & 11/15 & 6/5 \end{array}.$$

Pertanto la soluzione ottima di $(P)$ è $x^* = [0, 6/5, 9/5, 0]^T$, con $z^* = 6/5$ (il problema originale è un problema di max).
Il duale $(D)$ di $(P)$ è:

$$(D) \begin{cases} \min w = & -3\pi_1 & +6\pi_2 & \\ & 8\pi_1 & +\pi_2 & \geq -3 \\ & -4\pi_1 & -\pi_2 & \geq -5 \\ & \pi_1 & +4\pi_2 & \geq 4 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases},$$

Applicando le relazioni di complementarietà, poichè la seconda e la terza componente di $x^*$ sono diverse da zero, allora il secondo e il terzo vincolo di $(D)$ all'ottimo sono soddisfatti per eguaglianza. Quindi la soluzione ottima del problema duale si ottiene risolvendo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -4\pi_1 & -\pi_2 & = -5 \\ \pi_1 & +4\pi_2 & = 4 \end{cases}.$$

Pertanto $\pi^* = [16/15, 11/15]^T$.

**Esercizio n.3** (punti: 6)
Dato il seguente problema $(PLI)$ di Programmazione Lineare Intera

$$(PLI) \begin{cases} \max z = & & x_2 & \\ & & & \\ & 4x_1 & -5x_2 & \geq 15 \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 2 \\ & & x_2 & \geq -3 \\ & x_1, & x_2 & \text{int.} \end{cases},$$

risolvere $(PLI)$ applicando il metodo Branch & Bound e risolvendo tutti i rilassamenti continui per via grafica.

*Risoluzione*
All'inizio, poichè non conosciamo un valore di $x_{opt}$, poniamo $z_{opt} = -\infty$. Risolvendo il rilassamento continuo di $(PLI)$, otteniamo $x^*_{PL} = [5/2, -1]^T$ e $z^*_{PL} = -1$. Facendo branching sulla prima componente otteniamo da $(PLI)$ due sottoproblemi $(PLI_1)$ e $(PLI_2)$, rispettivamente con l'aggiunta dei vincoli $x_1 \leq 2$ e $x_1 \geq 3$.

Utilizzando la strategia di visita in profondità dell'albero di Branch & Bound, risolvendo il rilassamento continuo di $(PLI_1)$, si ottiene $x^*_{PL1} = [2, -7/5]^T$ e $z^*_{PL1} = -1.4$; facendo branching su $x_2$, da $(PLI_1)$ otteniamo due nuovi sottoproblemi $(PLI_3)$ e $(PLI_4)$, rispettivamente con l'aggiunta dei vincoli $x_2 \leq -2$ e $x_2 \geq -1$.

Risolvendo il rilassamento continuo di $(PLI_3)$, si vede che esso ammette infinite soluzioni ottime. Scegliendo per convenienza quella intera, ottiamo $x^*_{PL3} = [2, -2]^T$ e $z^*_{PL3} = -2$ e quindi $(PLI_3)$ viene chiuso per interezza della soluzione del rilassamento continuo. Poichè $z^*_{PL3} > z_{opt}$, allora si pone $x_{opt} = [2, -2]^T$ e $z_{opt} = -2$.

Visto che i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono interi, allora il sottoproblema $(PLI_4)$ viene chiuso. Risolvendo il rilassamento continuo di $(PLI_2)$ si ottiene $x^*_{PL2} = [3, -4/3]^T$ e $z^*_{PL2} = -1.33$.

Di nuovo, poichè i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono interi, allora è inutile fare branching a partire da $(PLI_2)$, il quale quindi viene chiuso.

Pertanto, avendo chiuso tutti i sottoproblemi, la soluzione ottima di $(PLI)$ è $x^*_{PLI} = x_{opt} = [2, -2]^T$ e $z^*_{PLI} = z_{opt} = -2$.

**Esercizio n.4** (punti: 6)
La società che gestisce l'aeroporto di Lamezia Terme deve assegnare 4 diversi equipaggi ($E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$) a 5 diversi voli settimanali di linea (in partenza da Lamezia Terme), le cui destinazioni sono Roma, Milano, Venezia, Palermo e Bologna, rispettivamente. In particolare, l'equipaggio $E_3$ deve essere assegnato esattamente a due diversi voli, mente gli altri equipaggi

devono essere assegnati esattamente a un solo volo. Ad ogni assegnamento equipaggio-volo è associato un costo (espresso in euro/settimana), determinato in funzione dell'anzianità di servizio di ciascun membro dell'equipaggio e della città di destinazione, secondo la seguente tabella:

| | ROMA | MI | VE | PA | BO |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 1.500 | 1.700 | 2.000 | 1.900 | 1.550 |
| $E_2$ | 1.300 | 1.000 | 1.100 | 1.800 | 1.200 |
| $E_3$ | 1.000 | 1.600 | 1.100 | 1.500 | 1.600 |
| $E_4$ | 1.100 | 1.700 | 1.400 | 1.300 | 1.450 |

Ad esempio, assegnare l'equipaggio $E_2$ al volo Lamezia-Palermo, costerebbe alla società ogni settimana 1.800 euro, mentre assegnare l'equipaggio $E_3$ al volo Lamezia-Milano costerebbe settimanalmente 1.600 euro.

Si vuole decidere come assegnare gli equipaggi ai voli, tenendo conto che a ogni volo si deve assegnare esattamente un solo equipaggio, con l'obiettivo di minimizzare la spesa complessiva settimanale derivante dall'assegnamento degli equipaggi ai voli.

Indichiamo con $x_{ij} \in \{0,1\}$, $i = 1,2,3,4$ e $j = 1,2,3,4,5$, le variabili decisionali aventi il seguente significato: $x_{ij} = 1$ se l'equipaggio $E_i$ è assegnato al volo $j$, $x_{ij} = 0$ altrimenti. Indicando con $c_{ij}$ i costi unitari riportati nella tabella, il problema può quindi essere formulato nel seguente modo:

$$(P) \begin{cases} \min\limits_{x} z = & \sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} \\ & \sum\limits_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2,4 \\ & \sum\limits_{j=1}^{5} x_{3j} = 2 \\ & \sum\limits_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2,3,4,5 \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3,4,5 \end{cases} .$$

Scrivere un programma LINGO (Linear, INteractive and General Optimizer) che consenta di risolvere $(P)$, facendo uso degli oggetti SETS e DATA.

*Risoluzione*

```
SETS:
EQUIPAGGI / E1, E2, E3, E4/;
VOLI / RM, MI, VE, PA, BO/;
ASSEGNAMENTO(EQUIPAGGI, VOLI): COSTI, X;
ENDSETS
DATA:
 COSTI =  1500,  1700,  2000,  1900,  1550,
          1300,  1000,  1100,  1800,  1200,
          1000,  1600,  1100,  1500,  1600,
          1100,  1700,  1400,  1300,  1450;
ENDDATA
MIN = @SUM(EQUIPAGGI(I):@SUM(VOLI(J): COSTI(I,J)*X(I,J)));
@FOR( EQUIPAGGI(I) | I#NE#3: @SUM( VOLI(J): X(I,J)) = 1);
@SUM(VOLI(J):X(3,J))=2;
@FOR(VOLI(J): @SUM( EQUIPAGGI(I): X(I,J)) = 1);
@FOR(EQUIPAGGI(I): @FOR(VOLI(J): @BIN(X(I,J))));
```