Laurea in Informatica
A.A. 03/04
Corso di RICERCA OPERATIVA*
Seconda prova intermedia

CS - 21 giugno 2004

Esercizio n.1 (punti: 5)
Dato il seguente problema (P) di Programmazione Lineare:

$$(P)\begin{cases} \max z = & 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & \\ & -4x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \geq 12 \\ & -2x_1 & -4x_2 & -3x_3 & \geq 6 \\ & & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases},$$

sia T^* la tabella ottima in forma canonica per (P), fornita dall'algoritmo del simplesso:

$$T^* = \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -5 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -3/2 & 0 & -1/2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & -6 \end{array}.$$

1. (punti: 2) Costruire il duale (D) di (P);
2. (punti: 3) a partire dalla conoscenza della soluzione ottima $x^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*]^T$ di (P), ottenibile da T^*, risolvere (D) applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness).

Risoluzione
Per costruire il duale (D) di (P), moltiplichiamo prima per -1 entrambi i vincoli di (P). Quindi il duale è:

$$(D)\begin{cases} \min w = & -12\pi_1 & -6\pi_2 & \\ & 4\pi_1 & +2\pi_2 & = 2 \\ & 3\pi_1 & +4\pi_2 & \geq 3 \\ & -2\pi_1 & +3\pi_2 & \geq -2 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases},$$

Dalla tabella T^*, si vede che la soluzione ottima di (P) è degenere e quindi (D) avrà infinite soluzioni ottime. Inoltre, osservando che x_1 è libera in segno e ricordando che $x_1 = x_1^+ - x_1^-$, con x_1^+ e x_1^- variabili positive, si ha $x_1^* = 0 - 3 = -3$. Quindi, per il problema (P) di partenza, $x^* = [-3, 0, 0]^T$ e $z^* = -6$.

Imponendo le relazioni di scarto complementare e imponendo il soddisfacimento di tutti i vincoli di (D), si ottiene $\pi^* = [(1-k)/2, k]^T$, con $3/5 \leq k \leq 1$.

Esercizio n.2 (punti: 4)
Dato il seguente problema (PLI) di Programmazione Lineare Intera

$$(PLI)\begin{cases} \max z = & \frac{5}{2}x_1 & -x_2 & \\ & & -x_2 & \leq 2 \\ & 2x_1 & & \leq 5 \\ & & x_2 & \leq 0 \\ & x_1 & & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int.} \end{cases},$$

risolvere (PLI) applicando il metodo Branch & Bound e risolvendo tutti i rilassamenti continui per via grafica.
Risoluzione
Risolvendo il problema con l'algoritmo di Branch & Bound e scegliendo una qualsiasi delle due strategie

*__NOTA:__

- **La prova scritta si intende superata se, nella seconda prova intermedia, si realizza un punteggio complessivo (comprensivo anche dei punti relativi all'esercizio di teoria) pari almeno a 10;**
- **la prova orale si intende superata se, superata la prova scritta, nell'esercizio di teoria si realizza un punteggio pari almeno a 2.5**

di visita dell'albero di Branch & Bound, vengono generati a partire da (PLI) due soli sottoproblemi: uno viene chiuso per interezza della soluzione (si aggiornano x_{opt} e z_{opt}) del rilassamento continuo, l'altro per inammissibilità del rilassamento continuo. La soluzione ottima di (PLI) è $x^*_{PLI} = [2, -2]^T$, con valore di funzione obiettivo pari a 7.

Esercizio n.3 (punti: 4)
Una casa editrice deve effettuare il trasporto di libri da 3 depositi (D_1, D_2, D_3) a 4 librerie (L_1, L_2, L_3, L_4), con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di trasporto. Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari (espressi in euro) c_{ij} di trasporto da ciascun deposito D_i a ciascuna libreria L_i, le quantità di libri a_i $(i = 1, 2, 3)$ disponibili nei depositi e le quantità b_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ richieste dalle singole librerie:

	L_1	L_2	L_3	L_4	a_i
D_1	0.7	0.8	1	1.5	70
D_2	0.4	2.5	0.8	0.5	90
D_3	1	0.5	1.5	0.9	30
b_j	25	75	50	40	

Ad esempio, il deposito D_1 ha una disponibilità di 70 libri e la libreria L_3 ne richiede almeno 50; inoltre trasportare un libro da D_1 a L_4 costa 1.5 euro.

Indicando con x_{ij} (variabili decisionali) il numero di libri trasportati dal deposito D_i alla libreria L_j $(i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4)$, il problema può essere formulato come problema (P) di ottimizzazione nel seguente modo:

$$
(P) \begin{cases} \min\limits_x & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \le a_i \quad i = 1, 2, 3 \\ & \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \ge b_j \quad j = 1, 2, 3, 4 \\ & x_{ij} \ge 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4 \\ & x_{ij} \text{ int} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} .
$$

Scrivere un programma LINGO (Linear, INteractive and General Optimizer) che consenta di risolvere (P), facendo uso degli oggetti "SETS" e "DATA".

Risoluzione
Facendo riferimento alla notazione usata in (P), un possibile modo di scrivere il programma LINGO è il seguente:

```
SETS:
DEPOSITI / D1 D2 D3 / : A;
LIBRERIE / L1 L2 L3 L4/ : B;
LIBRITRASP (DEPOSITI, LIBRERIE): X, C;
ENDSETS

DATA:
C = 0.7 0.8 1 1.5 0.4 2.5 0.8 0.5 1 0.5 1.5 0.9;
A = 70 90 30;
B= 25 75 50 40;
ENDDATA

MIN = @SUM(DEPOSITI(I): @SUM(LIBRERIE(J): C(I,J)*X(I,J)));

@FOR(DEPOSITI(I): @SUM(LIBRERIE(J): X(I,J)) <= A (I));
@FOR(LIBRERIE(J): @SUM(DEPOSITI(I): X(I,J)) >= B (J));
@FOR(DEPOSITI(I): @FOR(LIBRERIE(J): @GIN(X(I,J))));
```

Esercizio n.4 - Teoria (punti: 5)
Dato il seguente problema (P) di Programmazione Lineare:

$$(P)\begin{cases} \min\limits_{x} z = & c^T x & \\ & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{cases},$$

con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $rg(A) = m < n$. Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di base per (P), avente valore di funzione obiettivo pari a $\bar{z}$.

- Dimostrare che $z = \bar{z} + \hat{c}^T x_N$, dove z è il valore di funzione obiettivo in corrispondenza di una qualsiasi soluzione ammissibile per (P) e $\hat{c}$ è il vettore dei costi ridotti relativo al punto $\bar{x}$;
- dimostrare che la condizione $\hat{c}^T \geq 0$ è sufficiente perchè $\bar{x}$ sia una soluzione ottima per (P);
- commentare la seguente affermazione: "La condizione $\hat{c}^T \geq 0$ è anche necessaria perchè $\bar{x}$ sia una soluzione ottima per (P)".