UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Primo Modulo di Ricerca Operativa – Esercitazione
12 aprile 2000

Esercizio

È dato il problema di PL in figura.
Trovare una soluzione ottima del problema con l'algoritmo del simplesso o dimostrare che il problema è illimitato inferiormente.
Cosa succede se il 6 diventa 16?

$$\min \quad 4x_2 + 4x_3 + x_5$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_5 + x_6 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_5 + x_7 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_8 = 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}; \; c^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base iniziale è evidentemente B = [A_6 A_7 A_3]. La matrice carry iniziale è: (ricordando $-u^T$=(0 0 -4), e z=24:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & -4 & -24 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{matrix}$$

Calcolo dei costi ridotti:
$\bar{c}_1 = 0 - u^T A_1 = -8$, entra in base A_1.
Test di illimitatezza:
$\bar{A}_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, fallito
cambio di base:
$\arg\min \left\{ \frac{0}{3}; \bullet; \frac{6}{2} \right\} = 1$ esce la prima colonna in base (A_6).
Aggiornamento dell'inversa: pivot sull'elemento a_{11} (tra parentesi in tabella)

$$\begin{matrix} -8 & 0 & 0 & -4 & -24 \\ (3) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 8/3 & 0 & -4 & -24 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 & 6 \end{matrix}$$

La nuova base è evidentemente B = [A_1 A_7 A_3].

Calcolo dei costi ridotti:
$\bar{c}_2 = 4 - u^T A_2 = -8/3$, entra in base A_2.
Test di illimitatezza:
$\bar{A}_2 = B^{-1} A_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix}$, fallito

cambio di base:

$\arg\min\left\{\bullet;\bullet;\frac{6}{5/3}\right\} = 3$ esce la terza colonna in base (A_3).

Aggiornamento dell'inversa: pivot sull'elemento a_{32} (tra parentesi in tabella)

$$\begin{array}{ccccc} -8/3 & 8/3 & 0 & -4 & -24 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ (5/3) & -2/3 & 0 & 1 & 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} 8/5 & 0 & -12/5 & -72/5 \\ 1/5 & 0 & 1/5 & 6/5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 0 & 3/5 & 18/5 \end{array}$$

La nuova base è evidentemente B = [A_1 A_7 A_2].

Calcolo dei costi ridotti:

$\bar{c}_4 = c_4 - u^T A_4 = 12/5 \geq 0$,

$\bar{c}_5 = c_5 - u^T A_5 = -3/5 < 0$ entra in base A_5.

Test di illimitatezza:

$$\bar{A}_5 = B^{-1}A_5 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$, fallito

cambio di base:

$\arg\min\left\{\bullet;\bullet;\frac{18/5}{2/5}\right\} = 3$ esce la terza colonna in base (A_2).

Aggiornamento dell'inversa: pivot sull'elemento a_{35} (tra parentesi in tabella)

$$\begin{array}{ccccc} -3/5 & 8/5 & 0 & -12/5 & -72/5 \\ -1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 6/5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ (2/5) & -2/5 & 0 & 3/5 & 18/5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3/2 & -9 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 18 \\ -1 & 0 & 3/2 & 9 \end{array}$$

La nuova base è evidentemente B = [A_1 A_7 A_5].

Calcolo dei costi ridotti:

$\bar{c}_2 = c_2 - u^T A_2 = 3/2 \geq 0$,

$\bar{c}_3 = c_3 - u^T A_3 = 5/2 \geq 0$

$\bar{c}_4 = c_4 - u^T A_4 = 3/2 \geq 0$

$\bar{c}_6 = c_6 - u^T A_6 = 1 \geq 0$

$\bar{c}_8 = c_8 - u^T A_8 = 3/2 \geq 0$

La base corrente è ottima. La soluzione ottima è: $x^{*T} = (3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad 0 \quad 18 \quad 0)$, $z^* = 9$.

Una soluzione ottima del problema duale è data dal vettore $u^{*T} = (-1 \quad 0 \quad 3/2)$.

Per quanto riguarda la seconda domanda, viene richiesto l'effetto di un vettore perturbazione $\varepsilon^T = (0 \quad 0 \quad 10)$.

$$\bar{b} + B^{-1}\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 48 \\ 24 \end{pmatrix} \geq 0$$ .La base resta ammissibile e pertanto resta anche ottima.

La nuova soluzione ottima è $x^{*T} = (8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 24 \quad 0 \quad 48 \quad 0)$, il valore associato è $z^* = 9 + u^{*T}\varepsilon = 24$.