Laurea in Informatica
A.A. 03/04
Corso di RICERCA OPERATIVA
Prima prova intermedia*

CS - 14 maggio 2004

Esercizio n.1 (punti: 4)
In vista delle prossime elezioni, la Regione Calabria deve ancora assegnare altri 5 comuni (Pizzo, Rende, Gioia Tauro, Amantea, Crotone) a 4 circoscrizioni elettorali (C_1, C_2, C_3, C_4). In base alle posizioni geografiche dei 5 comuni e ad altri fattori tecnico-organizzativi, si sono stimati i seguenti i costi di assegnamento, espressi in euro:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Pizzo	7.200	5.000	3.050	8.300
Rende	4.000	7.100	5.100	6.400
Gioia Tauro	8.100	9.050	9.000	7.150
Amantea	8.850	5.300	3.250	4.800
Crotone	9.000	5.500	10.000	5.200

Ad esempio, assegnare il comune di Pizzo alla circoscrizione C_4 comporterebbe un costo per la Regione pari a 8.300 euro.

Si vuole decidere come assegnare i 5 comuni alle 4 circoscrizioni, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di assegnamento e tenendo conto dei seguenti vincoli:

- ogni comune deve essere assegnato esattamente ad una sola circoscrizione;
- il comune di Crotone può essere assegnato solo alle circoscrizioni C_1 o C_3;
- a ciascuna delle circoscrizioni C_1, C_3 e C_4 si deve assegnare esattamente un solo comune, mentre alla circoscrizione C_2 si devono assegnare esattamente due comuni.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.
Risoluzione

- Variabili decisionali: $x_{ij} \in \{0,\ 1\}$, col seguente significato: $x_{ij} = 1$, se il comune i è assegnato alla circoscrizione C_j, con $i = 1, \ldots, 5$ e $\jmath = 1, \ldots, 4$. Per semplicità adottiamo la seguente convenzione: l'indice 1 corrisponde al comune di Pizzo, l'indice 2 al comune di Rende, ..., l'indice 5 corrisponde al comune di Crotone;
- funzione obiettivo:

$$\min_x z = 7.200x_{11} + 5.000x_{12} + \ldots + 10.000x_{53} + 5.200x_{54};$$

- vincoli:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, 5$$
$$x_{51} + x_{53} = 1$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 3, 4$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_{i2} = 2$$
$$x_{ij} \in \{0,\ 1\} \quad i = 1, \ldots, 5 \quad j = 1, \ldots, 4$$

***La prova intermedia si intende superata se si realizza un punteggio totale pari almeno a 7**

Esercizio n.2 (punti: 8)
Dato il seguente problema (P) di Programmazione Lineare

$$(P)\left\{\begin{array}{rrrrl} \max z = & 3x_1 & +4x_2 & -2x_3 & \\ & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq 2 \\ & & 4x_2 & +x_3 & \leq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}\right. ,$$

sia $\bar{x}^T = [1,\ 0,\ 1/2]$ una soluzione ammissibile non ottima per (P).

1. (punti: 3) verificare se a $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base per (P);
2. (punti: 5) risolvere (P) secondo il seguente schema:
   - se a $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base, applicare il metodo del simplesso a partire da $\bar{x}$;
   - se a $\bar{x}$ non corrisponde una soluzione di base, applicare il metodo del simplesso scegliendo come matrice di base iniziale $B = I$.

Risoluzione
Scrivendo (P) in forma standard si ottiene:

$$(P_s)\left\{\begin{array}{rrrrrrl} \min z = & -3x_1 & -4x_2 & +2x_3 & & & \\ & x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & & = 2 \\ & & 4x_2 & +x_3 & & +x_5 & = 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}\right. .$$

Riscrivendo il punto $\bar{x}$ per il problema (P_s), otteniamo $\bar{x}^T = [1,\ 0,\ 1/2,\ 0,\ 7/2]$. Si vede facilmente che al punto $\bar{x}$ non corrisponde una soluzione di base, poichè esso contiene 3 componenti non nulle ($m = 2$), e quindi la condizione necessaria affinchè una soluzione possa essere di base è violata.

Applicando il simplesso al problema (P_s) e scegliendo $B = I$, la prima tabella T in forma canonica che si ottiene è la seguente:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline -3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

È possibile scegliere come colonna di pivot sia la prima che la seconda; scegliendo la prima, l'elemento di pivot corrisponde necessariamente all'elemento T_{11}; effettuando l'operazione pivot, si ottiene:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & -1 & 8 & 3 & 0 & 6 \end{array} ,$$

corrispondente al punto $\bar{x}^T = [2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 4]$, avente valore di funzione obiettivo per (P_s) pari a $\bar{z} = -6$. Il criterio di ottimalità del simplesso ancora non è soddisfatto e quindi, facendo pivot sull'elemento T_{22}, si ottiene

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 7/4 & 1 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 33/4 & 3 & 1/4 & 7 \end{array} .$$

Poichè il vettore dei costi ridotti è positivo, il punto $\bar{x}^T = [1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0]$ generato dall'ultima tabella è un punto di ottimo. Quindi, per il problema (P) $x^* = [1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0]^T$ e $z^* = 7$.