A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Secondo appello
14 luglio2004

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili: x1 numero di lotti del fondo Kezef Italia
x2 numero di lotti del fondo Kezef Europa

Formulazione:

$$\max \quad \frac{120}{6}x_1 + 0{,}17 * 200x_2$$

$$\begin{cases} 120x_1 + 200x_2 \le 100.000 \\ x_2 \le 0{,}5(x_1 + x_2) \\ x \ge 0 \end{cases}$$

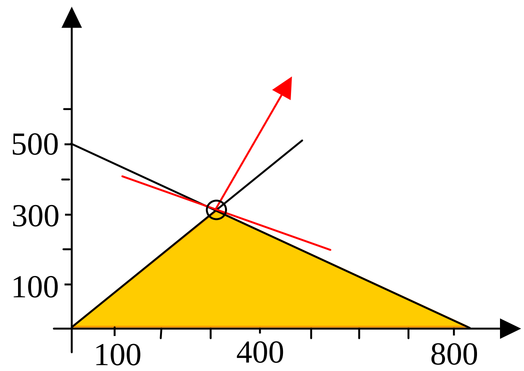
che in forma standard diventa:

$$\min \quad -20x_1 - 34x_2$$

$$\begin{cases} 120x_1 + 200x_2 + x_3 = 100.000 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Si può passare direttamente alla fase 2, utilizzando come base B=[A_3A_4] . Risolvendo la fase 2 al primo pivot entra A_1 ed esce A_3, al secondo entra A_2 ed esce A_4. La soluzione ottima è $x_1=x_2=312{,}5$.

Passando al metodo grafico si ha il poliedro in figura con la soluzione ottima $x_1=x_2=312{,}5$ che è coerente con quanto ottenuto con il simplesso.



Esercizio 2

a) Risolvere il problema del cammino minimo per ogni coppia di nodi applicando l'algoritmo di Floyd e Warshall. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo. Altrimenti mostrate il cammino a peso minimo dal nodo 1 al nodo 4.

0	7	3	1
1	0	10	5
∞	∞	0	5
∞	-3	∞	0

1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4

PASSO 1

0	7	3	1
1	0	**4**	**2**
∞	∞	0	5
∞	-3	∞	0

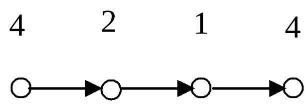
1	1	1	1
2	2	**1**	**1**
3	3	3	3
4	4	4	4

PASSO 2

0	7	3	1
1	0	4	2
∞	∞	0	5
-2	-3	**1**	**-1**

1	1	1	1
2	2	1	1
3	3	3	3
2	4	**1**	**1**

Ciclo a peso negativo



b) Nel caso, in cui non si siano individuati cicli a peso negativo si ottenga la rete *F* a partire dal grafo *G* eliminando da *G* tutti gli archi a peso negativo. Nel caso in cui nel passo precedente sia stato individuato un ciclo a peso negativo si ottenga *F* eliminando da *G* tutti gli archi coinvolti nel ciclo a peso negativo. Formulare, senza risolverlo, il problema di calcolare il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 4 sulla rete *F* come un problema di flusso a costo minimo.

La rete *F* si ottiene dal grafo *G* rimuovendo gli archi coinvolti nel ciclo a peso negativo. Ovvero gli archi (4,2), (2,1) e (1,4). Il problema del cammino a costo minimo si può formulare come un problema di flusso a costo minimo in una rete non capacitata, rendendo il nodo partenza del cammino una sorgente di una unità di flusso, e rendendo il nodo di destinazione del cammino un nodo pozzo che assorbe l’unità di flusso generata. Tutti gli altri nodi della rete sono nodi di transito.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Secondo appello

14 luglio2004

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili: x1 numero di ore di lavoro ordinario lavorate dagli operai nel primo semestre
x2 numero di ore di lavoro ordinario lavorate dagli operai nel secondo semestre
y1 numero di ore di lavoro straordinario lavorate dagli operai nel primo semestre
y1 numero di ore di lavoro straordinario lavorate dagli operai nel secondo semestre
M giacenza di magazzino tra primo e secondo semestre

NB: questa è solo una possibile formulazione. Si può semplificare il problema omettendo le variabili x1 e x2, basta osservare infatti che il numero di ore di lavoro ordinario nei due semestri è una costante.

Formulazione:

$$\min \quad \frac{960}{160}x_1 + 7y_1 + \frac{1120}{160}x_2 + 10y_2 + 2M$$

$$\begin{cases} 500 + \frac{1}{4}(x_1 + y_1) = 1000 + M \\ M + \frac{1}{4}(x_2 + y_2) = 900 \\ x_1 \le 6*3*160 = 2880 \\ x_2 \le 5*3*160 = 2400 \\ y_1 \le 6*3*20 = 360 \\ y_2 \le 5*3*20 = 300 \\ x, y, M \ge 0 \end{cases}$$

che diventa:

$$\min \quad 6x_1 + 7y_1 + 7x_2 + 10y_2 + 2M$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}y_1 - M = 500 \\ M + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}y_2 = 900 \\ x_1 \le 2880 \\ x_2 \le 2400 \\ y_1 \le 360 \\ y_2 \le 300 \\ x, y, M \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\max \quad 500u_1 + 900u_2 + 2880u_3 + 2400u_4 + 360u_5 + 300u_6$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}u_1 + u_3 \le 6 \\ \frac{1}{4}u_1 + u_5 \le 7 \\ \frac{1}{4}u_2 + u_4 \le 7 \\ \frac{1}{4}u_2 + u_6 \le 10 \\ -u_1 + u_2 \le 2 \\ u_1, u_2 \quad libere;\ u_3, u_4, u_5, u_6 \le 0 \end{cases}$$

Per rispondere alla seconda domanda basta osservare che 300 paia di scarpe in magazzino tra primo e secondo semestre individuano completamente la soluzione primale del problema, pari a:

$$(x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad M)^T = (2880 \quad 320 \quad 2400 \quad 0 \quad 300)^T$$

Impostando il problema duale e risolvendo le condizioni di ortogonalità nelle sole variabili u si ottiene:

$$(u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6)^T = (28 \quad 30 \quad -1 \quad -0{,}5 \quad 0 \quad 0)^T$$

che è ammissibile duale.

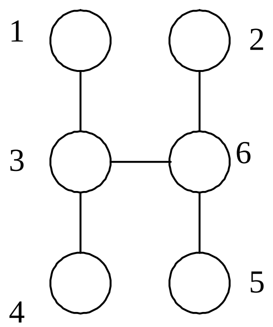
Per rispondere all'ultima domanda basta osservare che le variabili duali u_5, u_6 sono nulle all'ottimo, e quindi la soluzione ottima non cambia se cambio il loro costo. Allora poiché all'ottimo y_1=320 e y_2=0, diminuendo di 1 il costo di y_1 si otterrà un risparmio di 320 euro, a fronte dell'*una tantum* di 300 euro. Quindi questa soluzione è vantaggiosa. Diminuire di 3 il costo di y_2 invece non porta alcun beneficio che compensi l'*una tantum*. Quindi questa soluzione non conviene.

Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di un grafo non orientato. La prima e l'ultima riga indicano, rispettivamente, i nomi degli archi e i pesi.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
5	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
6	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1
Costi	7	5	10	5	3	4	6	10	12	2

a) Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal nodo **1**, utilizzando l'algoritmo di Prim-Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero ricoprente (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo).



I nodi del grafo vengono fissati ad 1 nell'ordine
1, 3,4,6, 5,2.

b) Supponendo che il peso dell'arco *e* diventi 6 si discuta che cosa cambia nella soluzione ottima. Usare le condizioni di ottimalità sui tagli per ricalcolare la nuova soluzione ottima senza eseguire nuovamente l'algoritmo.

E' sufficiente individuare il taglio composto dagli archi (1,2), (2,6) e (2,5) ed osservare come l'arco *e* con il nuovo peso 6 non è l'arco del taglio con peso minimo. Quindi per le condizioni di ottimalità sui tagli, l'arco *e* non appartiene più all'albero ricoprente di costo minimo, ed è sostituito dall'arco *d* con peso 5.

C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Secondo appello

14 luglio2004

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili: A, numero di batterie di tipo Aleph prodotte
B, numero di batterie di tipo Beth prodotte
G, numero di batterie di tipo Ghimel prodotte

Formulazione:

$$\max \quad (25-12)A+(20-6-5)B+(30-4-2*5)G \qquad\qquad \min \quad -13A-9B-16G$$

$$\begin{cases} B+2G \le 4000 \\ A \ge 2B \\ A \le G \\ A,B,G \ge 0 \end{cases} \quad \text{che in F. S. diventa:} \quad \begin{cases} B+2G+S_1 = 4000 \\ -A+2B+S_2 = 0 \\ A-G+S_3 = 0 \\ A,B,G \ge 0 \end{cases}$$

Si può passare direttamente alla fase 2, utilizzando come base B=[A_4 A_5 A_6] . Risolvendo la fase 2 al primo pivot entra A_3 ed esce A_4, al secondo entra A_1 ed esce A_6. La soluzione ottima è A=G=2000, B=0.

Esercizio 2

a) Risolvere il problema del cammino minimo per ogni coppia di nodi applicando l'algoritmo di Floyd e Warshall. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo. Altrimenti mostrate il cammino a peso minimo dal nodo 1 al nodo 4.

0	-4	7	8
6	0	-1	5
4	∞	0	∞
∞	6	∞	0

1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4

PASSO 1

0	-4	7	8
6	0	-1	5
4	**0**	0	**12**
∞	6	∞	0

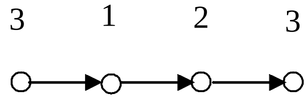
1	1	1	1
2	2	2	2
3	**1**	3	**1**
4	4	4	4

PASSO 2

0	-4	**-5**	**1**
6	0	-1	5
4	0	**-1**	12
∞	6	∞	0

1	1	**2**	**2**
2	2	2	2
3	1	**2**	1
4	4	4	4

Ciclo a peso negativo



b) Nel caso, in cui non si siano individuati cicli a peso negativo si ottenga la rete *F* a partire dal grafo *G* eliminando da *G* tutti gli archi a peso negativo. Nel caso in cui nel passo precedente sia stato individuato un ciclo a peso negativo, si ottenga *F* eliminando da *G* tutti gli archi coinvolti nel ciclo a peso negativo. Formulare, senza risolverlo, il problema di calcolare il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 4 sulla rete *F* come un problema di flusso a costo minimo.

La rete *F* si ottiene dal grafo *G* rimuovendo gli archi coinvolti nel ciclo a peso negativo. Ovvero gli archi (3,1), (1,2) e (2,3). Il problema del cammino a costo minimo si può formulare come un problema di flusso a costo minimo in una rete non capacitata, rendendo il nodo 1 di partenza del cammino una sorgente di un numero di unità di flusso pari al numero degli altri nodi di *F* e rendendo tutti gli altri nodi di destinazione del cammino nodi pozzo che assorbono una unità di flusso. In questo caso i nodi 2, 3 e 4 di *F*.

D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Secondo appello

14 luglio2004

SOLUZIONI

Esercizio 1

Variabili: x1 numero di ore di lavoro ordinario lavorate dagli operai nel primo semestre
x2 numero di ore di lavoro ordinario lavorate dagli operai nel secondo semestre
y1 numero di ore di lavoro straordinario lavorate dagli operai nel primo semestre
y1 numero di ore di lavoro straordinario lavorate dagli operai nel secondo semestre
M giacenza di magazzino tra primo e secondo semestre

NB: questa è solo una possibile formulazione. Si può semplificare il problema omettendo le variabili x1 e x2, basta osservare infatti che il numero di ore di lavoro ordinario nei due semestri è una costante.

Formulazione:

$$\min \quad \frac{960}{160}x_1 + 7y_1 + \frac{1120}{160}x_2 + 8y_2 + 8M$$
$$\begin{cases} 400 + \frac{1}{5}(x_1 + y_1) = 800 + M \\ M + \frac{1}{5}(x_2 + y_2) = 700 \\ x_1 \le 6*3*160 = 2880 \\ x_2 \le 5*3*160 = 2400 \\ y_1 \le 6*3*20 = 360 \\ y_2 \le 5*3*20 = 300 \\ x, y, M \ge 0 \end{cases}$$

che diventa:

$$\min \quad 6x_1 + 7y_1 + 7x_2 + 8y_2 + 8M$$
$$\begin{cases} \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}y_1 - M = 400 \\ M + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}y_2 = 700 \\ x_1 \le 2880 \\ x_2 \le 2400 \\ y_1 \le 360 \\ y_2 \le 300 \\ x, y, M \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \max \quad 400u_1 + 700u_2 + 2880u_3 + 2400u_4 + 360u_5 + 300u_6$$
$$\begin{cases} \frac{1}{5}u_1 + u_3 \le 6 \\ \frac{1}{5}u_1 + u_5 \le 7 \\ \frac{1}{5}u_2 + u_4 \le 7 \\ \frac{1}{5}u_2 + u_6 \le 8 \\ -u_1 + u_2 \le 8 \\ u_1, u_2 \quad libere; u_3, u_4, u_5, u_6 \le 0 \end{cases}$$

Per rispondere alla seconda domanda basta osservare che 300 paia di scarpe in magazzino tra primo e secondo semestre individuano completamente la soluzione primale del problema, pari a:

$$(x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad M)^T = (2880 \quad 0 \quad 2400 \quad 220 \quad 176)^T$$

Impostando il problema duale e risolvendo le condizioni di ortogonalità nelle sole variabili u si ottiene:

$$(u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6)^T = (32 \quad 40 \quad -0{,}4 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^T$$

che è ammissibile duale.

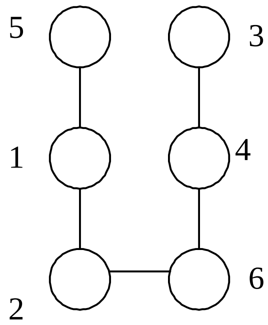
Per rispondere all'ultima domanda basta osservare che le variabili duali u_5, u_6 sono nulle all'ottimo, e quindi la soluzione ottima non cambia se cambio il loro costo. Allora poiché all'ottimo $y_1=0$ e $y_2=220$, diminuire di 0,5 il costo di y_1 non porta alcun beneficio che compensi l'*una tantum* di 300 euro. Quindi questa soluzione non conviene. Diminuendo di 1 il costo di y_2 si otterrà un risparmio di 220 euro, a fronte dell'*una tantum* di 300 euro. Quindi neanche questa soluzione è vantaggiosa. La soluzione migliore è quindi di non accettare nessuna offerta.

Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di un grafo non orientato. La prima e l'ultima riga indicano, rispettivamente, i nomi degli archi e i pesi.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*L*
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
5	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
Costi	7	17	12	3	17	8	11	9	13	9

a) Trovare l'albero ricoprente di peso minimo utilizzando l'algoritmo di Kruskal. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero ricoprente (come vengono modificati i flag delle componenti connesse del grafo).



Gli archi vengono all'albero ricoprente nel seguente ordine (1,5), (1,2), (4,6), (3,4) e (2,6) oppure (1,5), (1,2), (4,6), (3,4) e (2,6).

b) Supponendo che il peso dell'arco *I* diventi 6 si discuta che cosa cambia nella soluzione ottima. Usare le condizioni di ottimalità sui cammini per ricalcolare la nuova soluzione ottima senza eseguire nuovamente l'algoritmo.

E' sufficiente individuare il cammino composto dagli archi (3,5), (3,4), (4,6), (6,2), (2,1), (1,5) ed osservare come l'arco *I* con il nuovo peso 6 non è l'arco con peso massimo del cammino. Quindi per le condizioni di ottimalità sui cammini, l'arco *I* apparterrà all'albero ricoprente di costo minimo, sostituendo l'arco *G* con peso 11.