INTEGRALI IMPROPRI

Test di autovalutazione

1. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{1}{5}}\ \mathrm{d}x$:

   (a) vale $\dfrac{4}{5}$

   (b) diverge

   (c) vale $\dfrac{5}{4}$

   (d) è negativo.

2. L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4+2x}{5x^3}\, dx$:

   (a) vale $-\dfrac{4}{5}$

   (b) diverge

   (c) vale $\dfrac{4}{5}$

   (d) tende a 0 .

3. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}\ \mathrm{d}x$:

   (a) vale 1

   (b) vale $0 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$

   (c) è indeterminato perché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ e^{-x}$ è una forma indeterminata

   (d) diverge.

4. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$:

   (a) converge a 1

   (b) diverge perché $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln^2 x} = +\infty$

   (c) converge a $0 = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\ln^2 x}$

   (d) non esiste, perché la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ non è definita in $x = 0$.

5. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}$:

   (a) diverge
   (b) converge a $0 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+4x^2}$
   (c) converge a $\dfrac{\pi}{4}$
   (d) è uguale al valore del limite $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} (\arctan 2a)$.

6. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \log x \ \ \mathrm{d}x$:

   (a) diverge perché $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \log x = -\infty$
   (b) converge a -1
   (c) converge a 1
   (d) è uguale al valore del seguente limite: $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (\ln\ b - b)$.

7. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \ \ \mathrm{d}x$:

   (a) diverge
   (b) converge a $0 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}$
   (c) converge a 1
   (d) è indeterminato.

8. L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \ \ \mathrm{d}x$:

   (a) converge a $\sqrt{3}$
   (b) diverge perché $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$
   (c) converge a 1
   (d) diverge, perché la funzione integranda ha un asintoto verticale.

9. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \ \ \mathrm{d}x$:

   (a) è uguale al valore del limite $\displaystyle\lim_{b\to0} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{6}} - 2\sqrt{\sin b}}$
   (b) diverge
   (c) converge a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (d) è uguale al valore del limite $\displaystyle 2\lim_{b\to0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\sin b}\right)$.

10. Il limite:
$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \left(1-\cos\frac{1}{t}\right)\,dt$$

(a) è finito e positivo

(b) non esiste

(c) non è finito

(d) vale $0 = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{t}\right)$

11. L'integrale $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ dx

(a) ha un valore finito

(b) diverge

(c) rappresenta l'area compresa tra il grafico della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$ e l'asse delle x, per $x\in[\,0,9\,[$

(d) è positivo

12. L'integrale improprio $\int_0^1 9x^{-\frac{1}{3}}\,dx$:

(a) vale $\frac{27}{2}$

(b) diverge

(c) vale $\frac{1}{2}$

(d) è negativo

13. Sia f una funzione continua sull'intervallo I$=[2,+\infty[$.

(a) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ allora f è integrabile impropriamente su I

(b) Se f non è integrabile impropriamente su I, neppure $|f|$ lo è

(c) Se f è integrabile impropriamente su I, anche $|f|$ lo è

(d) Se f è integrabile impropriamente su I, allora f ha ordine di infinitesimo $k>1$ per $x\to+\infty$

14. L'area compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3}{5x^2}$ e l'asse delle x, per $x \in]a, b[$:

   (a) è finita se $]a, b[=]0, 1[$
   (b) non è finita se $]a, b[=]2, 3[$
   (c) non è finita se $]a, b[=]2, +\infty[$
   (d) vale $\frac{1}{5}$ se $]a, b[=]3, +\infty[$

15. L'integrale improprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x}\ \mathrm{d}x$:

   (a) oscilla
   (b) converge
   (c) è nullo
   (d) è negativo

16. L'integrale improprio $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ \mathrm{d}x$:

   (a) vale 0
   (b) diverge
   (c) è indeterminato
   (d) è maggiore di 1

17. La funzione integrale: $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$:

   (a) è dispari
   (b) non ha asintoti orizzontali
   (c) ha infiniti punti di massimo relativo
   (d) in $x = 0$ ha ordine di infinitesimo 3

18. L'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^3 - x}\ \mathrm{d}x$:

   (a) è negativo
   (b) diverge perché la funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-x}$ è infinita di ordine 1 per $x \to 0$
   (c) è uguale a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^3-x}$
   (d) converge

RISPOSTE

1. RISPOSTA ESATTA: (c)

   Infatti, usando la definizione di integrale improprio:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{5}}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-\frac{1}{5}}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}\right]_t^1 = \frac{5}{4}\lim_{t\to 0^+}\left(1-t^{\frac{4}{5}}\right) = \frac{5}{4}.$$

2. RISPOSTA ESATTA: (c)

   Infatti:

$$\int_1^{+\infty}\frac{4+2x}{5x^3}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\left(\frac{4}{5x^3}+\frac{2}{5x^2}\right)\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{4}{5}\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{2}{5}\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$

3. RISPOSTA ESATTA: (a)

   Infatti, applicando la regola di integrazione per parti per calcolare l'integrale indefinito, si ha:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\left[-\ \frac{x+1}{e^x}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\ \frac{t+1}{e^t}+1\right) = 1$$

4. RISPOSTA ESATTA: (a)

   Infatti:

$$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x\log^2 x}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x}\log^{-2}x\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{\log^{-1}x}{-1}\right]_t^{\frac{1}{e}} = -\ \log^{-1}\frac{1}{e} = 1$$

5. RISPOSTA ESATTA: (c)

   Infatti:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+4x^2}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{1+4x^2}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan(2x)\right]_0^t = \frac{\pi}{4}$$

6. RISPOSTA ESATTA: (b)

$$\int_0^1\log x\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1\log x\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to 0^+}[x\log x - x]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}(-1-t\log t+t) = -1$$

7. RISPOSTA ESATTA: (c)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ \mathrm{d}x \ = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x} \ \mathrm{d}x \ = \lim_{t\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty} (-e^{-t}+1) = 1$$

8. RISPOSTA ESATTA: (a)

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \ \mathrm{d}x \ = \lim_{t\to1^+} \int_t^2 \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \ \mathrm{d}x \ = \lim_{t\to1^+} \left[\sqrt{x^2-1}\right]_t^2 = \lim_{t\to1^+} (\sqrt{3}-\sqrt{t^2-1}) = \sqrt{3}$$

Le risposte (b) e (d) sono errate perché la presenza di un asintoto verticale non è sufficiente per concludere che l'integrale diverge.

9. RISPOSTA ESATTA: (d)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \ \mathrm{d}x \ = \lim_{t\to0^+} \int_t^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \ \mathrm{d}x \ = \lim_{t\to0^+} \left[2\sqrt{\sin x}\right]_t^{\frac{\pi}{6}} = 2\lim_{t\to0^+} \left(\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}-\sqrt{\sin t}\right) = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

10. RISPOSTA ESATTA: (a)

Studiamo il comportamento per $t \to +\infty$ di $f(t) = 1-\cos\frac{1}{t}$. Poniamo $\frac{1}{t} = u$ e studiamo il comportamento, per $u \to 0^+$, di

$$g(u) = 1-\cos u = 1-\left(1-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right) = \frac{u^2}{2}+o(u^2)$$

Dunque, per $t \to +\infty$, $1-\cos t \sim \dfrac{1}{2t^2}$.

Pertanto $f(t) \geq 0$; l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(t) \ \mathrm{d}t$ è convergente (perché converge l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2} \ \mathrm{d}t$) ed è positivo.

11. RISPOSTA ESATTA: (b)

Infatti, per $x \to 9$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}+3}{x-9} \sim \frac{6}{x-9}$$

Poiché $\int_0^9 \frac{6}{x-9} \ \mathrm{d}x$ diverge, per il criterio del confronto anche l'integrale $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}-3} \ \mathrm{d}x$ diverge.

Pertanto (a) è errata e (b) è esatta.

(d) è errata perché, per $x \in [0,9[$, $f(x) < 0$.

(c) è errata perché l'integrale improprio è divergente e comunque è una quantità negativa.

12. RISPOSTA ESATTA: (a)

$$\int_0^1 9x^{-\frac{1}{3}} \ \mathrm{d}x \ = 9 \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x^{-\frac{1}{3}} \ \mathrm{d}x \ = 9 \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right]_t^1 = 9\ \frac{3}{2} \lim_{t\to 0^+} (1 - t^{\frac{2}{3}}) = \frac{27}{2}$$

13. RISPOSTA ESATTA: (b)

La risposta (a) è errata: ad esempio la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non è integrabile impropriamente su I, anche se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

La risposta (b) è esatta in quanto è la contronominale della proprietà che lega la assoluta integrabilità impropria con l'integrabilità impropria semplice, e afferma:

Se $|f|$ è integrabile impropriamente su I, allora f è integrabile impropriamente su I.

La risposta (c) è errata: ad esempio la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ è integrabile impropriamente su I, mentre la funzione $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ non lo è.

La risposta (d) è errata: ad esempio la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ è integrabile impropriamente su I, ma non ha ordine di infinitesimo $k > 1$ per $x \to +\infty$.

14. RISPOSTA ESATTA: (d)

La risposta (a) è errata perché $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{5x^2} \ \mathrm{d}x$ è divergente.

La risposta (b) è errata perché $\displaystyle\int_2^3 \frac{3}{5x^2} \ \mathrm{d}x$ è convergente.

La risposta (c) è errata perché $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3}{5x^2} \ \mathrm{d}x$ è convergente.

La risposta (d) è esatta; infatti:

$$\int_3^{+\infty} \frac{3}{5x^2} \ \mathrm{d}x \ = \lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{3}{5x^2} \ \mathrm{d}x \ = \frac{3}{5} \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_3^t = \frac{3}{5}\frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

15. RISPOSTA ESATTA: (b)

La risposta (a) è errata perché su $\mathrm{I} = [3, +\infty[$ la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2 \log x}$ è strettamente positiva.

La risposta (b) è esatta; infatti, applicando il criterio del confronto, osserviamo che, su I,

$\dfrac{1}{x^2 \log x} < \dfrac{1}{x^2}$ e l'integrale improprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ \mathrm{d}x$ è convergente.

Le risposte (c) e (d) sono errate per quanto detto in (a).

16. RISPOSTA ESATTA: (a)

La risposta (a) è esatta; infatti $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è una funzione dispari, gli estremi di integrazione sono simmetrici rispetto all'origine e l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ \mathrm{d}x$ è convergente.

Di conseguenza le risposte (b), (c), (d) sono errate.

17. RISPOSTA ESATTA: (c)

La risposta (a) è errata perché la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$ è dispari e dunque $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ è una funzione pari.

La risposta (b) è errata; infatti l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ è convergente, come si può verificare applicando il criterio del confronto: $\left(\dfrac{\sin t}{1+t^2} < \dfrac{1}{1+t^2} \text{ e } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \text{ è convergente}\right)$.
Ciò significa che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ è finito e dunque $F(x)$ ha un asintoto orizzontale destro.

La risposta (c) è esatta; infatti $F'(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$ e dunque $F(x)$ ha infiniti punti di massimo e minimo dove $\sin x$ si annulla.

La risposta (d) è errata perché:

$F''(x) = \dfrac{\cos x(1+x^2) - 2x\sin x}{(1+x^2)^2}$; dunque $F''(0) = 1$ e lo sviluppo di McLaurin di $F(x)$ risulta

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Pertanto l'ordine di infinitesimo di $F(x)$ per $x \to 0$ è 2.

18. RISPOSTA ESATTA: (d)

La risposta (a) è errata perché la funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-x} = \dfrac{x+1}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x(x-1)}$

è positiva nell'intervallo I$= [2, +\infty[$.

La risposta (b) è errata; infatti il comportamento di $f(x)$ in $x = 0$ non interessa in quanto il punto $x = 0$ non appartiene all'intervallo di integrazione I$= [2, +\infty[$.

La risposta (c) è errata; infatti $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^3-x}\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{x+1}{x^3-x}\ \mathrm{d}x$, ma non è uguale al limite della funzione integranda.

La risposta (d) è esatta; infatti, per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x-1)} \sim \frac{1}{x^2}$$

e l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$ è convergente.