

Problema dello zaino (Knapsack)

Ci sono n oggetti, ne conosciamo il valore P_j e l'ingombro w_j , $j=1, \dots, n$.
È data inoltre la capacità massima, b , di un contenitore.

Problema: quali oggetti inserire nel contenitore rispettando il limite di capacità

Obiettivo: massimizzare il valore degli oggetti inseriti

Esempio di applicazione: costruire il Cd ideale.

Ogni oggetto è un file musicale il cui valore è dato dal nostro indice di gradimento ed il cui ingombro è la dimensione in kbyte. Il contenitore è un Cd-rom con 700 Mbyte di capacità. Nell'ipotesi che la dimensione complessiva dei file musicali a disposizione ecceda i 700 Mbyte vogliamo scegliere quali brani inserire massimizzando il gradimento complessivo

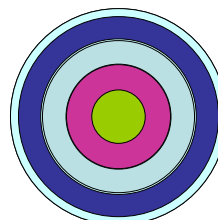
Esempio numerico di applicazione

25	Yesterday	2' 35''	←
23	Let it be	3' 20''	←
20	Money	4' 40''	
18	Mrs. Robinson	3' 30''	←
15	The End	4' 10''	
14	Private investigations	4' 35''	←

Spazio disponibile 15'

Spazio occupato 14'05''

Gradimento 80



CD-Rom

Variabili=Decisioni: quali oggetti inserire

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il } j\text{-esimo oggetto viene inserito nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

Modello

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

in alternativa

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad x_j \text{ intero}, \quad j = 1, \dots, n$$

oppure

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad x_j \in \mathbb{Z}^+, \quad j = 1, \dots, n$$

Estensione: il problema dello zaino multidimensionale

Ci sono n oggetti, $j=1, \dots, n$, ed m risorse, $i=1, \dots, m$. Sono noti:

- (a) per ogni oggetto j , il profitto p_j e l'assorbimento unitario w_{ij} di risorsa i
- (b) per ogni risorsa i , la disponibilità totale b_i

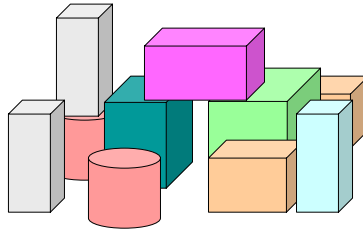
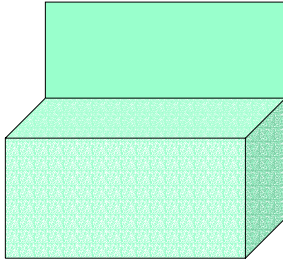
Problema: quali oggetti scegliere rispettando i limiti di ciascuna risorsa

Obiettivo: massimizzare il valore degli oggetti scelti

Esempio di applicazione: preparare i bagagli

Per ottimizzare i tempi di attesa all'aeroporto, abbiamo deciso di portare solo bagaglio a mano. Questa scelta comporta limiti rigorosi nel peso e nel volume a disposizione. Ogni oggetto da inserire nella valigia ha un valore (legato al suo utilizzo), un peso ed un volume. Nell'ipotesi che l'insieme di tutti gli oggetti superi i limiti imposti vogliamo scegliere quali inserire massimizzando il valore complessivo

Esempio numerico di applicazione



$$n = 10, \quad m = 2, \quad p_j = \{80, 40, 20, 30, 15, 30, 40, 25, 10, 50\}$$

$$b_1 = 20 \text{ (Kg)} \quad w_{1j} = \{1, 3, 2, 4, 3, 6, 4, 3, 8, 2\}$$

$$b_2 = 30 \text{ (dm}^3\text{)} \quad w_{2j} = \{4, 2, 5, 7, 4, 8, 1, 3, 6, 3\}$$

Variabili=Decisioni: quali oggetti scegliere

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il } j\text{-esimo oggetto viene scelto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

Modello

$$\max \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n$$

Esempio numerico di modello

$$\max 80x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 15x_5 + 30x_6 + 40x_7 + 25x_8 + 10x_9 + 50x_{10}$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 8x_9 + 2x_{10} \leq 20$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 8x_6 + 1x_7 + 3x_8 + 6x_9 + 3x_{10} \leq 30$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, 10$$

Soluzioni ammissibili:

$$x_A = \{1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1\} \quad \text{Valore} = 205$$

$$x_B = \{0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0\} \quad \text{Valore} = 155$$

Una differente applicazione: scelta di investimenti

Possiamo scegliere fra 10 differenti progetti di investimento. Per ciascun progetto conosciamo il rendimento complessivo p_j , il costo dell'investimento in termini finanziari w_{1j} , e l'assorbimento di forza lavoro w_{2j} , per $j=1, \dots, 10$. Si può disporre di un capitale b_1 e di una forza lavoro complessiva b_2 . Nell'ipotesi che l'insieme di tutti i progetti superi i limiti di capitale o forza lavoro vogliamo scegliere quali attivare per massimizzare il rendimento complessivo